Versenyfeladatok – továbbgondolva

Erben Péter

erben.peter@gmail.com

Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

Miről lesz szó?

Miről lesz szó?

-  A csúf,

Miről lesz szó?

-  A csúf,
-  a rossz,

Miről lesz szó?

-  A csúf,
-  a rossz,
-  és a jó. . .

Problémás kérdések

A feladatok megszövegezéséről

2015-2016/I. kat./1. ford./3. feladat

A 2025-re igaz, hogy $2025 = (20 + 25)^2$.

Van-e még ilyen négyjegyű szám?

A feladatok megszövegezéséről

$$2025 = (20 + 25)^2$$

A feladatok megszövegezéséről

$$2025 = (20 + 25)^2$$

Célok, megfontolások

- egyszerű, rövid megfogalmazás
- minimális „modellalkotás”

A feladatok megszövegezéséről

$$2025 = (20 + 25)^2$$

A feladatok megszövegezéséről

$$2025 = (20 + 25)^2$$

Kritikák

- egy megoldás megtalálása teljes értékű
- feladat nem definiált: $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^a$

A feladatok megszövegezéséről

$x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$

A feladatok megszövegezéséről

$x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$

$100x + y = (x + y)^2 \Rightarrow 99x = (x + y)(x + y - 1)$

A feladatok megszövegezéséről

$x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$

$100x+y = (x+y)^2 \Rightarrow 99x = (x+y)(x+y-1)$

Vagyis $9 \cdot 11 \mid (x+y)(x+y-1)$.

A feladatok megszövegezéséről

$x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$

$100x + y = (x+y)^2 \Rightarrow 99x = (x+y)(x+y-1)$

Vagyis $9 \cdot 11 \mid (x+y)(x+y-1)$.

11 többszöröseit nézve ezek adódnak:

A feladatok megszövegezéséről

$x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$

$100x+y = (x+y)^2 \Rightarrow 99x = (x+y)(x+y-1)$

Vagyis $9 \cdot 11 \mid (x+y)(x+y-1)$.

11 többszöröseit nézve ezek adódnak:

$45 \cdot 44 \ (x = 20, y = 25)$

A feladatok megszövegezéséről

$x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$

$100x+y = (x+y)^2 \Rightarrow 99x = (x+y)(x+y-1)$

Vagyis $9 \cdot 11 \mid (x + y)(x + y - 1)$.

11 többszöröseit nézve ezek adódnak:

$45 \cdot 44$ $(x = 20, y = 25)$

$55 \cdot 54$ $(x = 30, y = 25)$

A feladatok megszövegezéséről

$x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$

$100x+y = (x+y)^2 \Rightarrow 99x = (x+y)(x+y-1)$

Vagyis $9 \cdot 11 \mid (x+y)(x+y-1)$.

11 többszöröseit nézve ezek adódnak:

$45 \cdot 44$ $(x = 20, y = 25)$

$55 \cdot 54$ $(x = 30, y = 25)$

$99 \cdot 98$ $(x = 98, y = 01)$

A nehezen javítható hibákról

2015-2016/II. kat./döntő/1. feladat

Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 60^\circ$, $ACD\sphericalangle = 100^\circ$ és $AB = 4$ cm. Tudjuk még, hogy a BC oldal felezőpontja F, továbbá D az AB oldal olyan pontja, amelyre $BFD\sphericalangle = 80^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy $T_{ABC} + 2 \cdot T_{BFD} = \sqrt{24}$ cm^2, ahol T_{XYZ} az XYZ háromszög területét jelöli.

A nehezen javítható hibákról

Célok, megfontolások

A nehezen javítható hibákról

Célok, megfontolások

- a „szinuszos” formulák elkerülése

A nehezen javítható hibákról

Célok, megfontolások

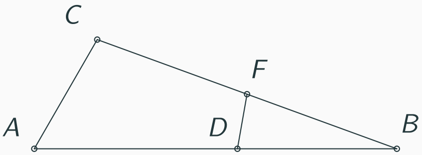
- a „szinuszos” formulák elkerülése
- a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ „elrejtése”

A nehezen javítható hibákról

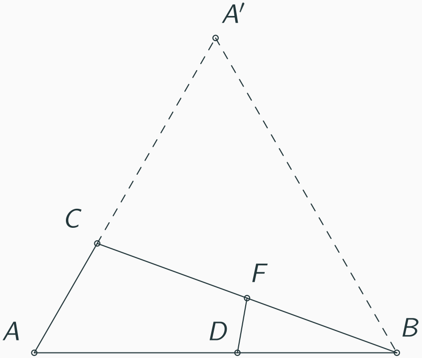
Célok, megfontolások

- a „szinuszos” formulák elkerülése
- a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ „elrejtése”
- „egyszerű” konstans

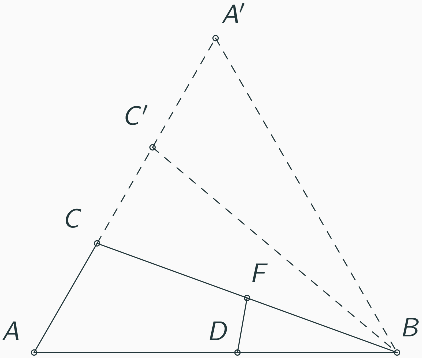
A nehezen javítható hibákról



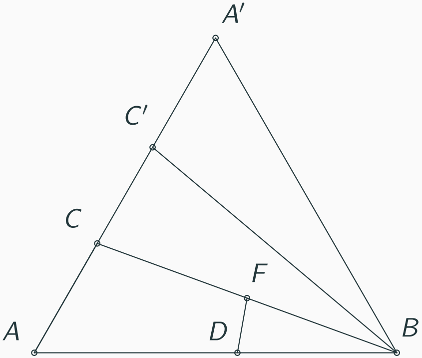
A nehezen javítható hibákról



A nehezen javítható hibákról



A nehezen javítható hibákról



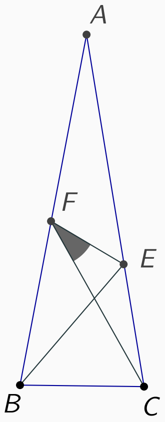
$$T_{AA'B} = 2T_{ABC} + T_{BCC'} = 2T_{ABC} + 4T_{BFD}$$
$$T_{ABC} + 2T_{BFD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 4^2}{4} = \sqrt{12}$$

A legnehezebb könnyű feladatok

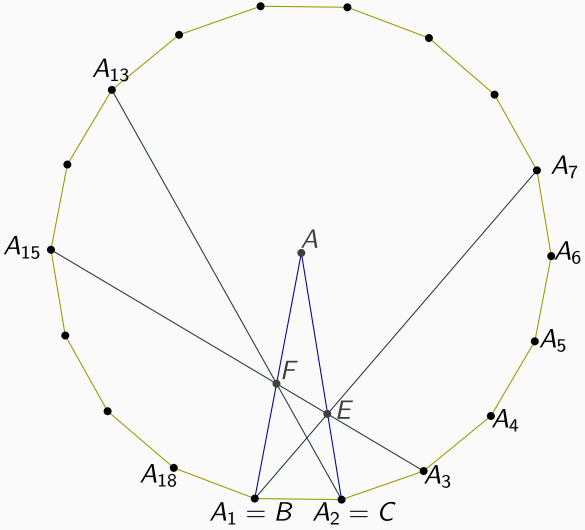
RLV tanárverseny 2016/ 30. feladat

Egy ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 20^\circ$ és $AB = AC$. Az AC oldal E és az AB oldal F pontjára $CBE\sphericalangle = 50^\circ$ és $BCF\sphericalangle = 60^\circ$. Mekkora $CFE\sphericalangle$?

A legnehezebb könnyű feladatok



A legnehezebb könnyű feladatok



A geometria nehéz

Egy érintőkör

2015-2016/III. kat./1. ford./1. feladat

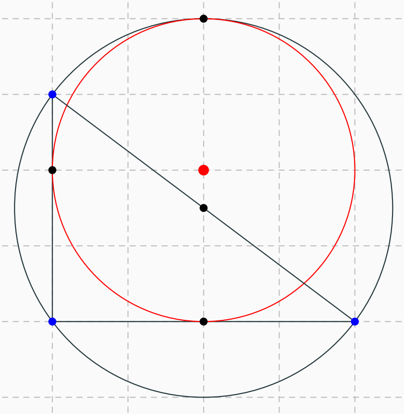
Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b. Egy k kör belülről érinti a háromszög köréírt körét, és érinti a befogókat is.

Fejezzük ki k sugarát a-val és b-vel!

Egy érintőkör

Az eredeti ötlet:

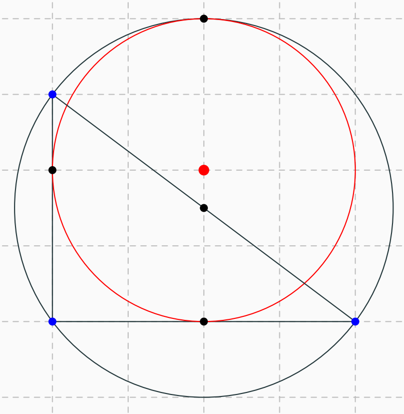
$a = 3$, $b = 4$



Egy érintőkör

Az eredeti ötlet:

$a = 3,\ b = 4$

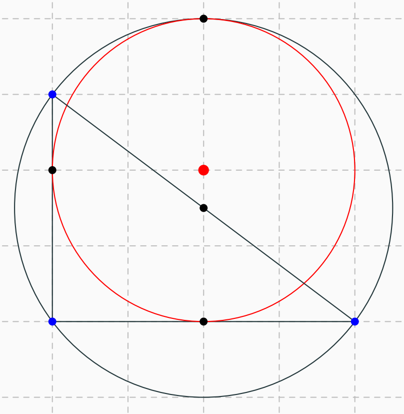


„Nem túl egyszerű rájönni a $(2; 2)$ középpontra?”

Egy érintőkör

Az eredeti ötlet:

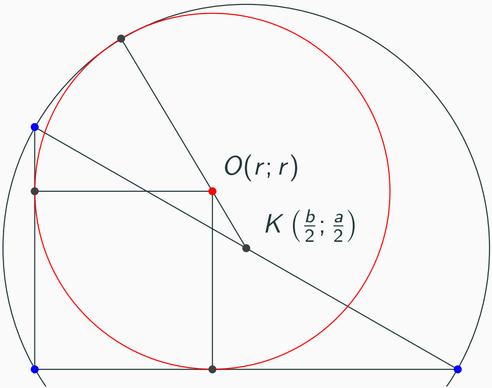
$a = 3,\ b = 4$



„Nem túl egyszerű rájönni a $(2; 2)$ középpontra?”

„Akkor tűzzük ki általánosan!”

Egy érintőkör



$$OK = \frac{c}{2} - r = \sqrt{(b/2 - r)^2 + (a/2 - r)^2}$$

Egy érintőkör

$$\frac{c}{2} - r = \sqrt{(b/2 - r)^2 + (a/2 - r)^2}$$

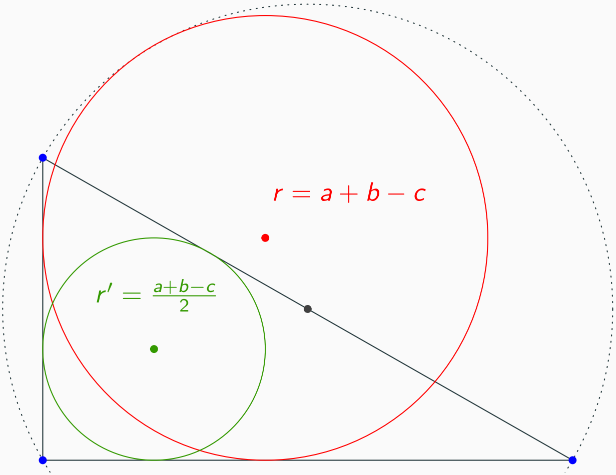
$$(c/2 - r)^2 = (b/2 - r)^2 + (a/2 - r)^2$$

$$\frac{c^2}{4} - cr + r^2 = \frac{b^2}{4} - br + r^2 + \frac{a^2}{4} - ar + r^2$$

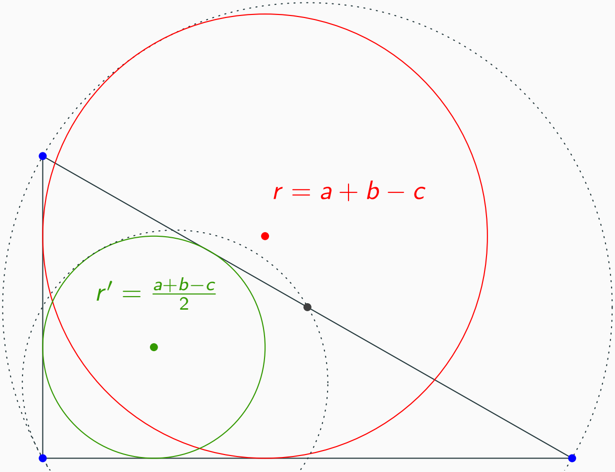
$$-cr + r^2 = -br + r^2 - ar + r^2$$

$$(a + b - c)r = r^2 \Rightarrow \boxed{a + b - c = r}$$

Egy érintőkör és egy meglepetés



Egy érintőkör és egy meglepetés



Egy érintőkör és egy meglepetés

Feuerbach-tétel

Egy háromszög Feuerbach-köre érinti a beírt és a hozzáírt köröket.

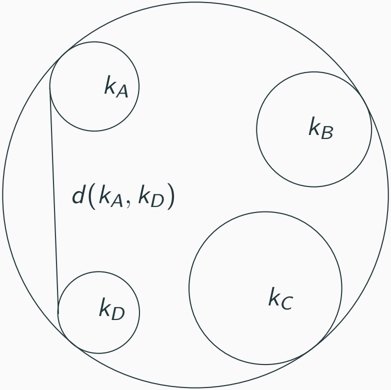
Egy érintőkör és a Casey-tétel

Fridrik Richárd észrevétele

A feladat megoldható a Casey-tétel felhasználásával is.

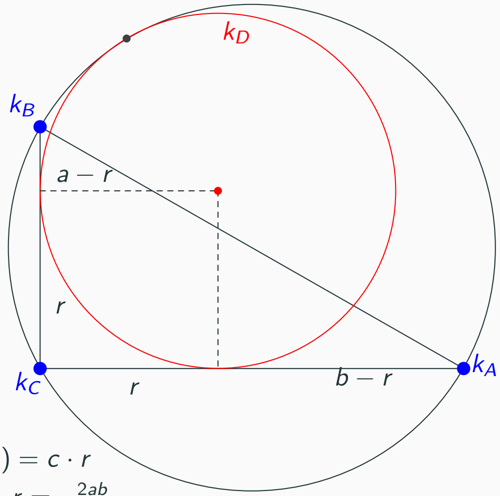
Egy érintőkör és a Casey-tétel

Casey-tétel



$$d(k_A, k_B) \cdot d(k_C, k_D) + d(k_B, k_C) \cdot d(k_A, k_D) = d(k_A, k_C) \cdot d(k_B, k_D)$$

Egy érintőkör és a Casey-tétel



$a \cdot (b-r) + b \cdot (a-r) = c \cdot r$

$2ab = (a+b+c)r \Rightarrow r = \frac{2ab}{a+b+c}$

Egy érintőkör és a Casey-tétel

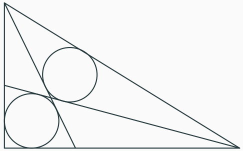
$$r = \frac{2ab}{a+b+c} \stackrel{?}{=} a + b - c$$

$$2ab \stackrel{?}{=} (a + b - c) \cdot (a + b + c)$$

$$2ab \stackrel{\checkmark}{=} (a + b)^2 - c^2$$

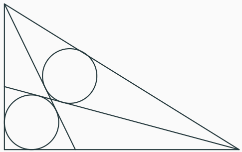
Két érintőkör

2009-2010/III. kat./döntő/2. feladat

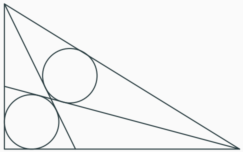


Egy derékszögű háromszöget négy részre bontottunk az ábra szerint. A négyszög alakú részbe kör írható, aminek sugara megegyezik a háromszög alakú részbe írt kör sugarával. Mekkora e körök sugara?

Két érintőkör

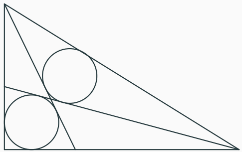


Két érintőkör



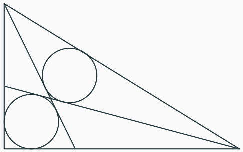
- Erős eszközökkel nehezebb megoldási utak adódnak.

Két érintőkör



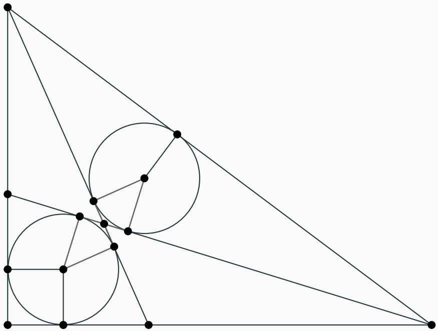
- Erős eszközökkel nehezebb megoldási utak adódnak.
- Egyértelmű a megoldás, mindig létezik egy és csak egy jó sugár.

Két érintőkör

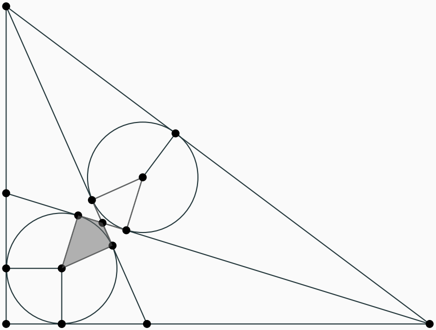


- Erős eszközökkel nehezebb megoldási utak adódnak.
- Egyértelmű a megoldás, mindig létezik egy és csak egy jó sugár.
- Szerkesztés?

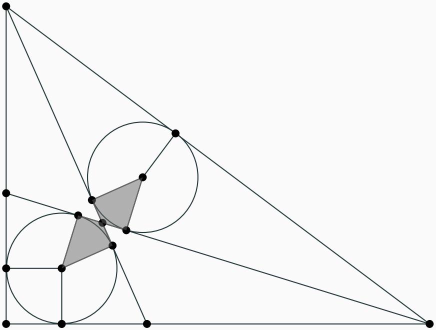
Két érintőkör



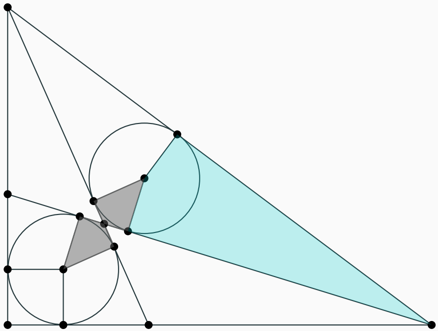
Két érintőkör



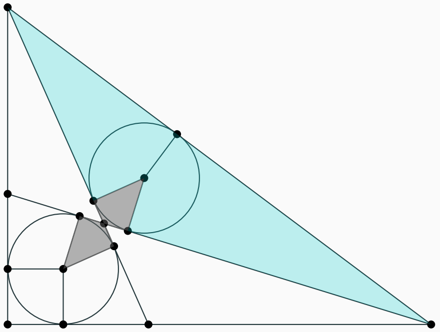
Két érintőkör



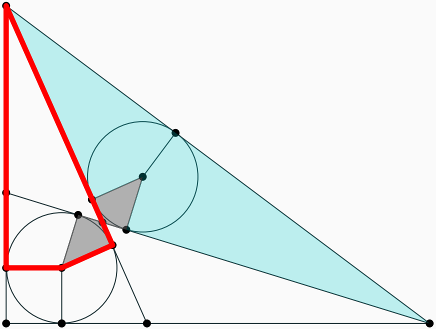
Két érintőkör



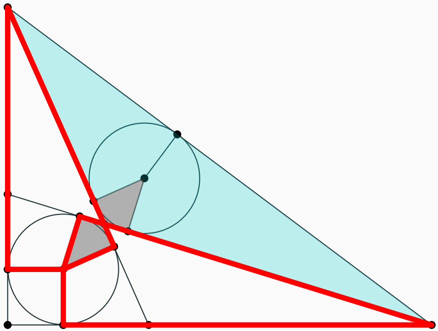
Két érintőkör



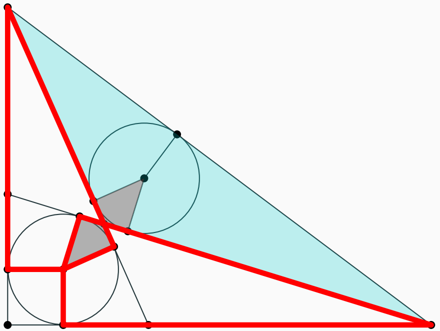
Két érintőkör



Két érintőkör



Két érintőkör



$$T = ab/2 = r^2 + r(a-r) + r(b-r) + xr + (c-x)r =$$
$$(a+b+c)r - r^2$$

Két érintőkör

$\frac{ab}{2} = (a + b + c)r - r^2$

Két érintőkör

$$\frac{ab}{2} = (a+b+c)r - r^2$$

$$r^2 - (a+b+c)r + \frac{ab}{2} = 0$$

Két érintőkör

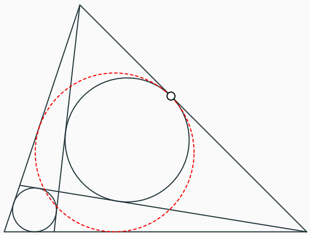
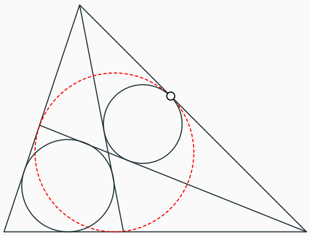
$$\frac{ab}{2} = (a+b+c)r - r^2$$

$$r^2 - (a+b+c)r + \frac{ab}{2} = 0$$

$$\boxed{r = \frac{a+b+c-\sqrt{(a+b+c)^2-2ab}}{2}}$$

Két érintőkör a KöMaL fórumon

Bohner Géza lemmája:

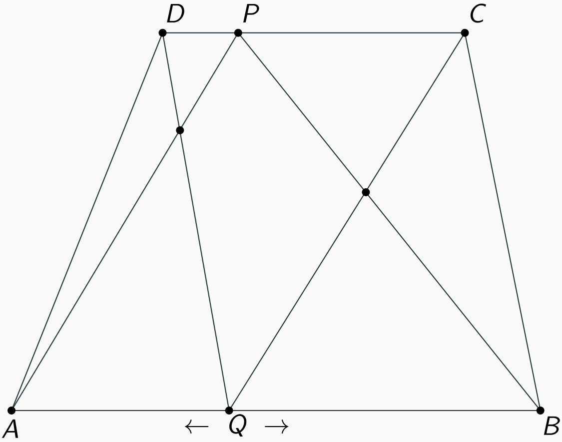
Amikor a diákoktól tanultunk

Egy nevezetes egyenlőtlenség

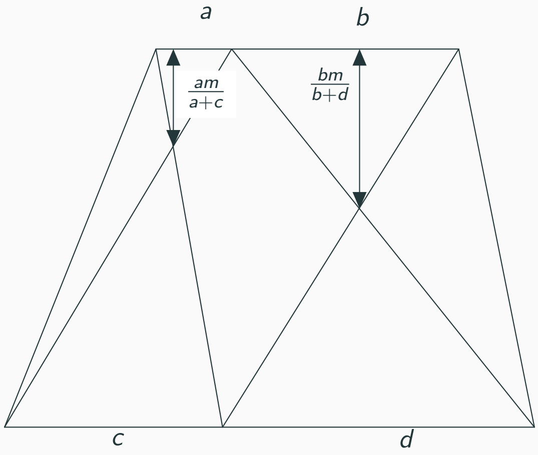
2011-2012/III. kat./döntő/3. feladat

Egy $ABCD$ trapéz CD alapján adott egy P belső pont. Hogyan válasszuk meg a másik AB alap Q belső pontját, ha azt szeretnénk, hogy a $PRQS$ négyszög területe a lehető legnagyobb legyen? R az AP és a DQ szakaszok metszéspontja, míg S a BP és a CQ szakaszok metszéspontja.

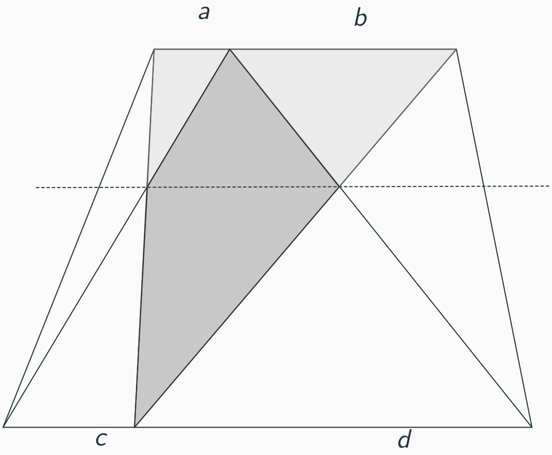
Egy nevezetes egyenlőtlenség



Egy nevezetes egyenlőtlenség

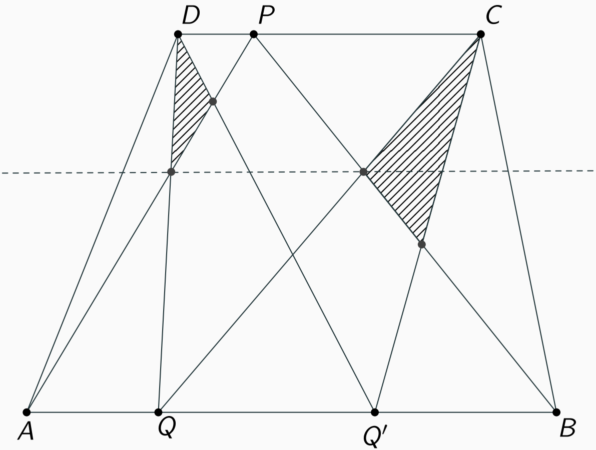


Egy nevezetes egyenlőtlenség



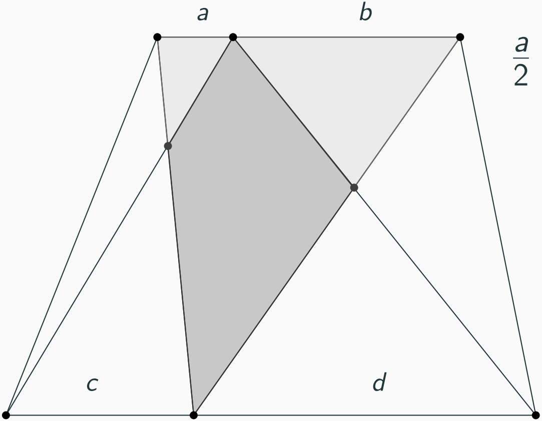
$$am/(a+c) = bm/(b+d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow a/b = c/d$$

Egy nevezetes egyenlőtlenség



Egy nevezetes egyenlőtlenség

Homonnay Bálint megoldása



$$\frac{a}{2} \cdot \frac{ma}{a+c} + \frac{b}{2} \cdot \frac{mb}{b+d}$$

Egy nevezetes egyenlőtlenség

Hommonay Bálint megoldása

$$\frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+d} \geq$$

Egy nevezetes egyenlőtlenség

Hommonay Bálint megoldása

$$\frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+d} \geq \frac{(a+b)^2}{a+c+b+d}$$

Egy nevezetes egyenlőtlenség

Hommonay Bálint megoldása

$$\frac{a^2}{a+c} + \frac{b^2}{b+d} \geq \frac{(a+b)^2}{a+c+b+d}$$

Egyenlőség feltétele:

Egy nevezetes egyenlőtlenség

Hommonay Bálint megoldása

$$\frac{a^2}{a+c}+\frac{b^2}{b+d}\geq\frac{(a+b)^2}{a+c+b+d}$$

Egyenlőség feltétele:

$\frac{a^2}{(a+c)^2}=\frac{b^2}{(b+d)^2}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Egy nevezetes egyenlőtlenség

Titu-lemma

Ha $b_i > 0$, és $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

Egy nevezetes egyenlőtlenség

Titu-lemma

Valójában a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenségről van szó,

$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2$

az $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ és $\sqrt{b_i}$ számokkal. Egyenlőség: $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}} / \sqrt{b_i} = c \Leftrightarrow a_i / b_i = c$.

Becslések

2012-2013/III. kat./döntő/2. feladat

2013 valós számra fennáll, hogy

$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2013} \geq 0$, valamint

$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \geq \frac{61}{4}$.

Igazold, hogy

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2013} \geq \sqrt{2013}$.

Becslések (1.) – Vegyük észre

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33} \geq 33 \cdot a_{33}$$

Becslések (1.) – Vegyük észre

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33} \geq 33 \cdot a_{33}$$

$$B = a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}$$

Becslések (1.) – Vegyük észre

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33} \geq 33 \cdot a_{33}$$

$$B = a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}$$

$$\frac{61}{4} \leq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \leq$$
$$a_{33} \cdot \underbrace{\left(a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}\right)}_{B} \Rightarrow B \geq \frac{61}{4 \cdot a_{33}}$$

Becslések (1.) – Vegyük észre

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33} \geq 33 \cdot a_{33}$$

$$B = a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}$$

$$\frac{61}{4} \leq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \leq$$
$$a_{33} \cdot \underbrace{\left(a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}\right)}_{B} \Rightarrow B \geq \frac{61}{4 \cdot a_{33}}$$

$$A + B \geq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}} \geq 2 \cdot \sqrt{33 \cdot a_{33} \cdot \frac{61}{4 \cdot a_{33}}} =$$

$$= \sqrt{2013}$$

Becslések (1.) – Vegyük észre

Egyenlőség feltétele:

Becslések (1.) – Vegyük észre

Egyenlőség feltétele:

(1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_{33}$

Becslések (1.) – Vegyük észre

Egyenlőség feltétele:

(1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_{33}$

(2) $(k > 33) : a_k^2 = a_k \cdot a_{33}$

$\Leftrightarrow a_k = a_{33}$ vagy $a_k = 0$

Becslések (1.) – Vegyük észre

Egyenlőség feltétele:

(1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_{33}$

(2) $(k > 33) : a_k^2 = a_k \cdot a_{33}$
$\Leftrightarrow a_k = a_{33}$ vagy $a_k = 0$

(3) $33 \cdot a_{33} = \frac{61}{4 \cdot a_{33}} \Rightarrow a_{33} = \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}}$

Becslések (1.) – Vegyük észre

Egyenlőség feltétele:

(1) $a_1 = a_2 = \ldots = a_{33}$

(2) $(k > 33)$: $a_k^2 = a_k \cdot a_{33}$

$\Leftrightarrow a_k = a_{33}$ vagy $a_k = 0$

(3) $33 \cdot a_{33} = \frac{61}{4 \cdot a_{33}} \Rightarrow a_{33} = \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}}$

$a_1 = a_2 = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}}$,

$a_{67} = \ldots = a_{2013} = 0$

Becslések (2.) – A sakkjátszma

Janzer Barnabás megoldása, Pataki János által letisztogatva

Először is „észrevesszük", hogy ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$, és $a_{67} = a_{68} = \ldots = a_{2013} = 0$, akkor egyenlőség teljesül, vagyis $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} = \sqrt{2013}$.

Becslések (2.) – A sakkjátszma

Janzer Barnabás megoldása, Pataki János által letisztogatva

Ezután megmutatjuk, hogy minden más esetben tudjuk úgy módosítani az a_i számokat, hogy a feltételek érvényben maradjanak, a számok összege ne nőjön, és végül legalább $\sqrt{2013}$ legyen.

Becslések (2.) – A sakkjátszma

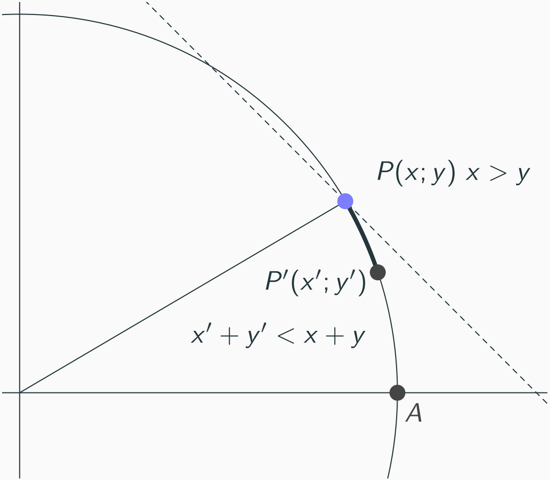
- Az $a_1, \ldots, a_{33}$ értékeket a_{34}-re csökkentjük,
- az a_{34}, a_{35}, … számokat lépésenként párosával módosítjuk úgy, hogy a négyzetösszegük egyáltalán ne változzon, a kis indexűek – a nagyok – a_{34}-hez, a nagy indexűek – a kicsik – pedig a 0-hoz közeledjenek.

Becslések (2.) – A sakkjátszma

F-lemma:

Ha $x \geq y \geq 0$, és x-et megnöveljük, y-t pedig csökkentjük (de legfeljebb nulláig) úgy, hogy az új számok négyzetösszege megegyezzen az $x^2 + y^2$ összeggel, akkor a kapott számok összege nem nagyobb, mint $x + y$.

Becslések (2.) – A sakkjátszma

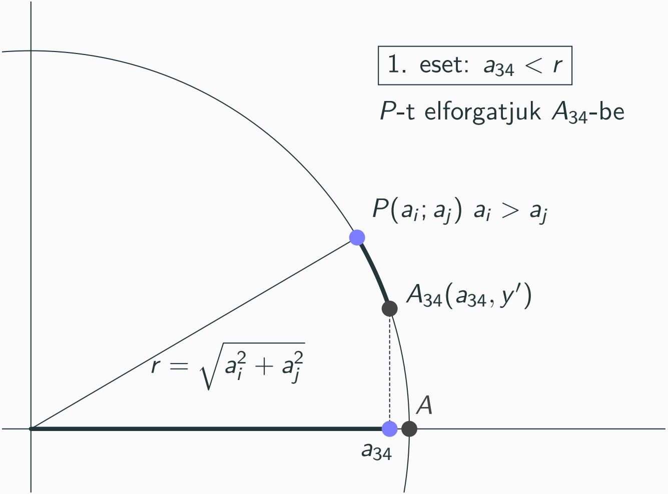


Becslések (2.) – A sakkjátszma

A 34-nél nagyobb indexű elemeket párosával „forgatjuk el”.

Először az (a_{35}, a_{2013}) párt forgatjuk: ha a_{35} értéke eléri a_{34}-et, vagy a_{2013} eléri nullát, megállunk. A következő párhoz mindig vesszük a legkisebb indexű olyan elemet, amely kisebb a_{34}-nél, és a legnagyobb indexű olyat, amely még pozitív.

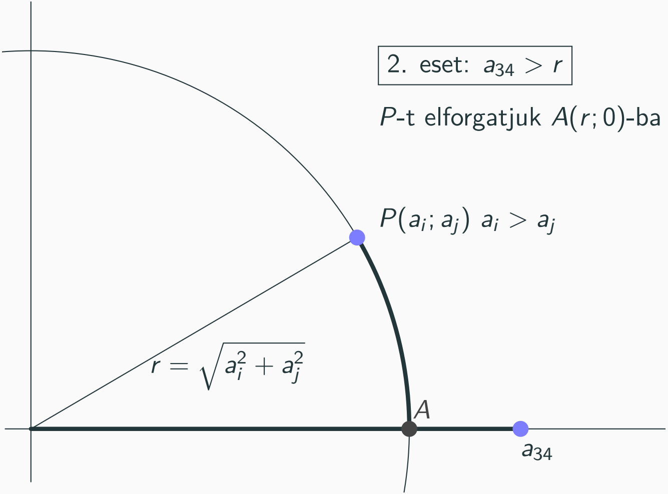
Becslések (2.) – A sakkjátszma



Becslések (2.) – A sakkjátszma

$\boxed{\text{2. eset: } a_{34} > r}$

P-t elforgatjuk $A(r;0)$-ba



Becslések (2.) – A sakkjátszma

Kétféleképpen maradhatunk elforgatható pár nélkül:

i) a sorozat minden pozitív eleme a_{34}-gyel egyenlő, a sorozat $x, x, \ldots, x, 0, \ldots, 0$ alakú;

ii) a sorozatnak egyetlen olyan pozitív eleme van, amely kisebb a_{34}-nél, a sorozat $x, x, \ldots, x, y, 0, \ldots, 0$ alakú.

Becslések (2.) – A sakkjátszma

$i)$ $x, x, \ldots, x, 0, \ldots, 0$ $(33 + m \text{ db } x)$

$mx^2 \geq \frac{61}{4} \Rightarrow x \geq \sqrt{\frac{61}{4m}}$

A forgatások során az összege nem nőtt, ezért

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} \geq (33 + m)x \geq$

$\geq (33 + m) \cdot \sqrt{\frac{61}{4m}} = \frac{1}{2}\left(33 \cdot \sqrt{\frac{61}{m}} + m \cdot \sqrt{\frac{61}{m}}\right) \geq \sqrt{2013}$

Becslések (2.) – A sakkjátszma

$ii)$ $x, x, \ldots, x, y, 0, \ldots, 0$ $(33 + m$ db $x)$

a) $m \geq 33$

b) $m < 33$

Mindkét esetben módosítjuk úgy a számokat, hogy az összeg nem változik, a négyzetösszeg pedig nő.

Becslések (2.) – A sakkjátszma

$ii)$ $x, x, \ldots, x, y, 0, \ldots, 0$ $(33 + m$ db $x)$

a) $m \geq 33$

$\rightarrow \underbrace{\tilde{x}, \tilde{x}, \ldots, \tilde{x}}_{33+m}, 0, \ldots, 0$

$$\tilde{x} = x + \frac{y}{33 + m}$$

Becslések (2.) – A sakkjátszma

ii) $x, x, \ldots, x, y, 0, \ldots, 0$ $(33 + m \text{ db } x)$

b) $m < 33$

$\rightarrow \underbrace{\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}}_{34+m}, 0, \ldots, 0$

$$\bar{x} = \frac{(33+m)x + y}{34+m}$$

Becslések (2.) – A sakkjátszma

Mindkét eset egyszerűen végigszámolható:

a) $mx^2 + y^2 \leq m \cdot \left(x + \frac{y}{33+m}\right)^2$

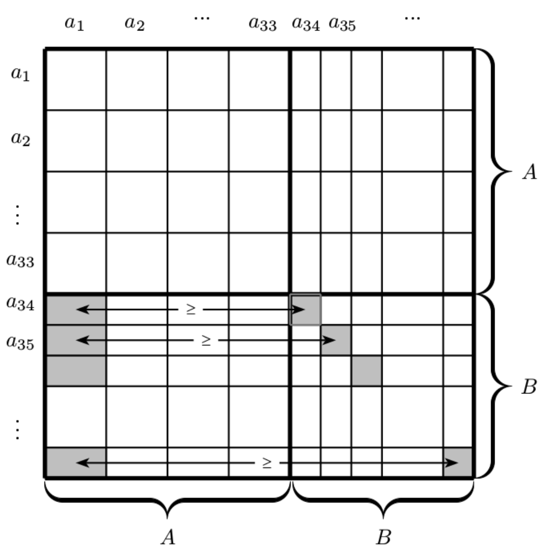
b) $mx^2 + y^2 \leq (m+1) \cdot \left(\frac{(33+m)x+y}{34+m}\right)^2$

Becslések (3.) – Látványmatek

Sztranyák Attila megoldása, Cserháti Zoltán ötlete alapján

A négyzetek területre utalhatnak. Készítsünk ábrát!

Becslések (3.) – Látványmatek



Becslések (3.) – Látványmatek

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33}$$

$$B = a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}$$

Becslések (3.) – Látványmatek

$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33}$

$B = a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}$

$A \cdot B \geq 33 \cdot \frac{61}{4}$

Becslések (3.) – Látványmatek

$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33}$

$B = a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}$

$A \cdot B \geq 33 \cdot \frac{61}{4}$

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013}\right)^2 = (A + B)^2 \geq$$

Becslések (3.) – Látványmatek

$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33}$

$B = a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}$

$A \cdot B \geq 33 \cdot \frac{61}{4}$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013})^2 = (A + B)^2 \geq$$
$$\geq 4AB \geq 4 \cdot 33 \cdot \frac{61}{4} = 2013$$

Becslések (3.) – Látványmatek

Fazakas Tünde megjegyzése:

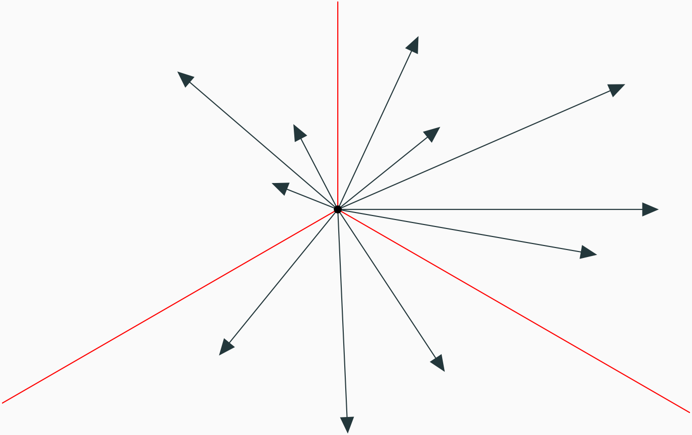
„*A 3. megoldása az 1. megoldás geometriai átirata.*"

Az átlag általánosítása

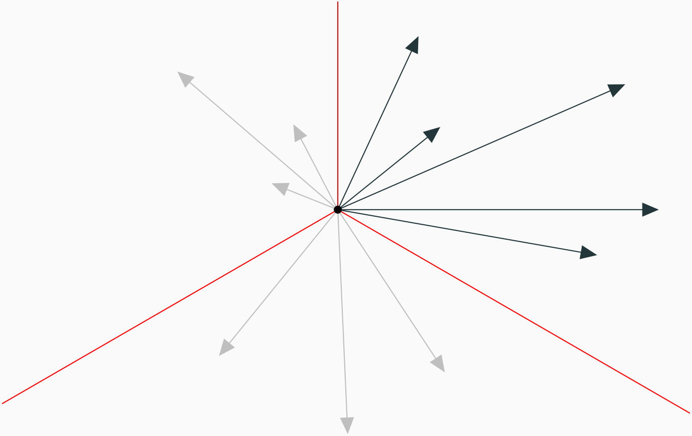
2014-2015/III. kat./döntő/3. feladat

Adott a síkban *n* darab vektor úgy, hogy a hosszuk összege 1. Bizonyítsuk be hogy kiválasztható közülük néhány oly módon, hogy a kiválasztott vektorok összegének hossza legalább 1/6.

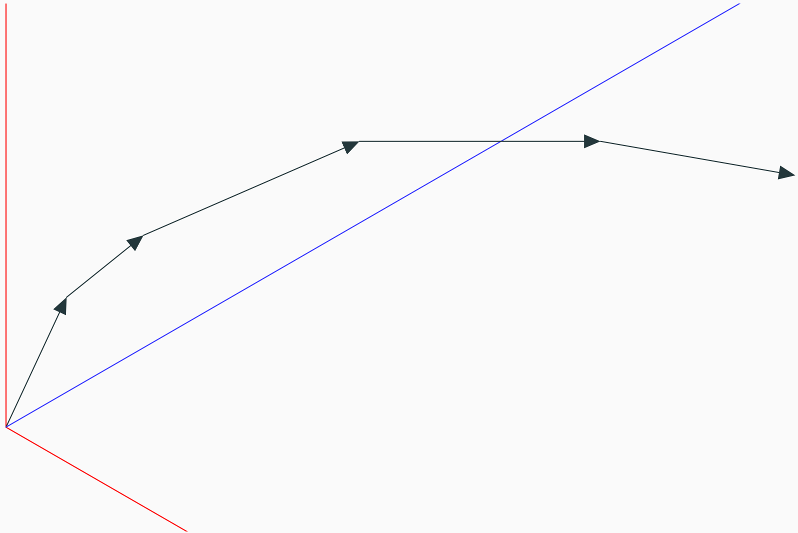
Az átlag általánosítása (1.)



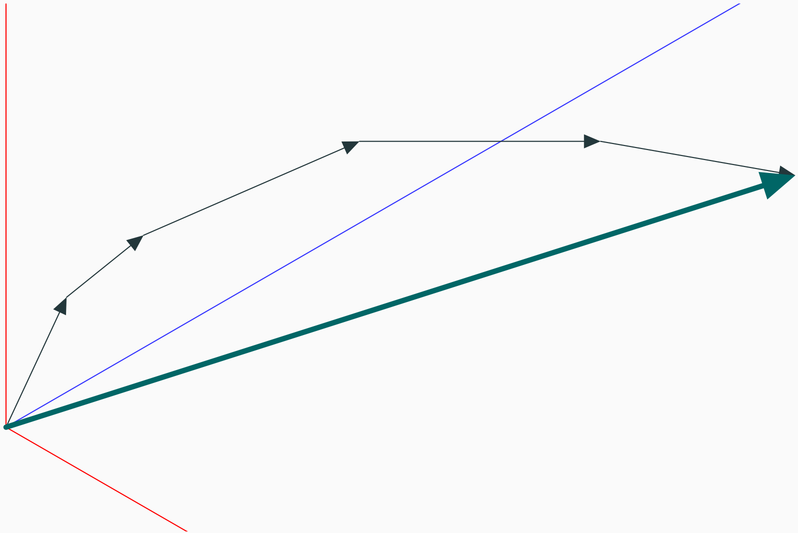
Az átlag általánosítása (1.)



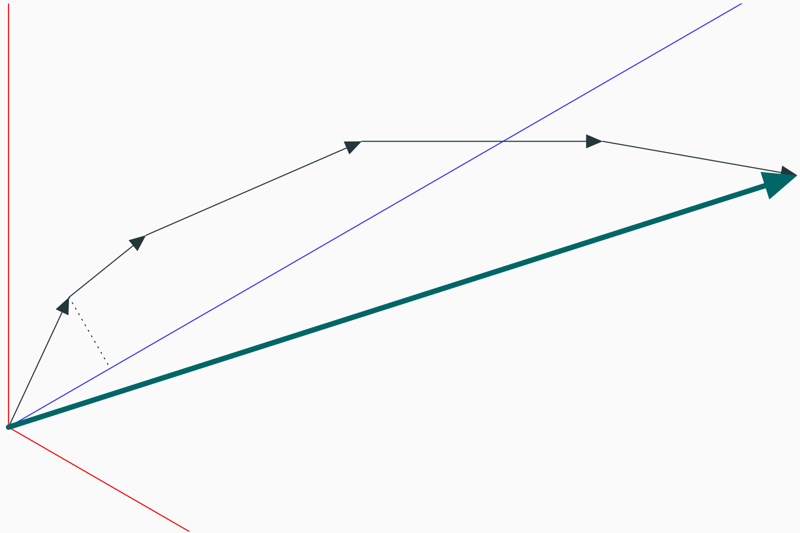
Az átlag általánosítása (1.)



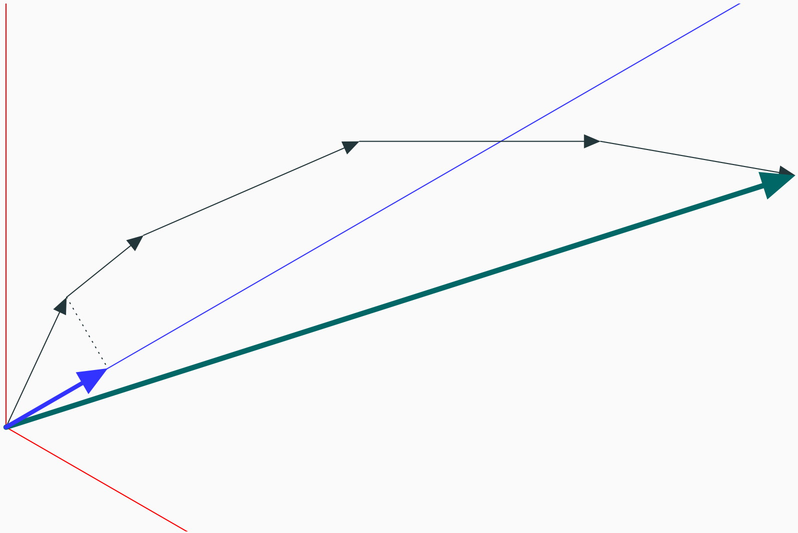
Az átlag általánosítása (1.)



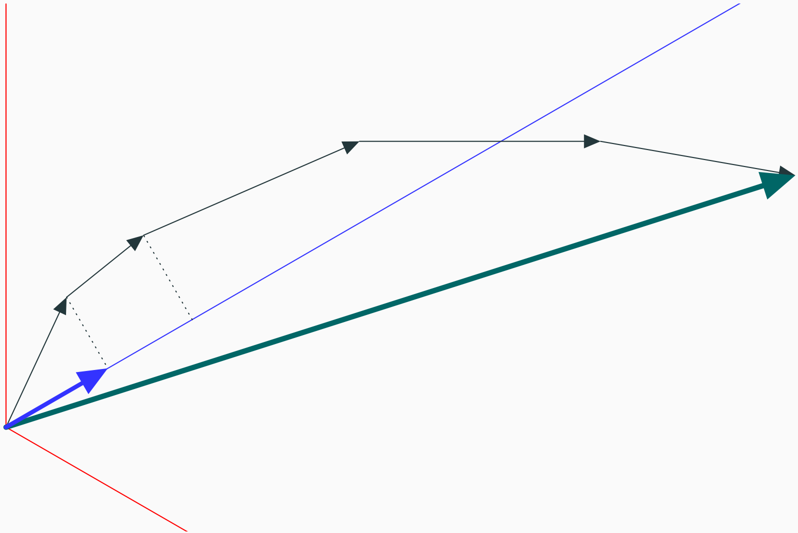
Az átlag általánosítása (1.)



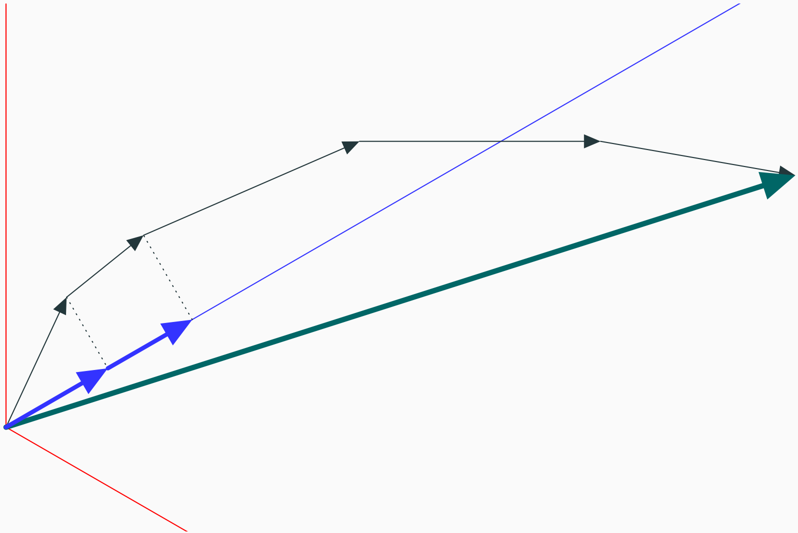
Az átlag általánosítása (1.)



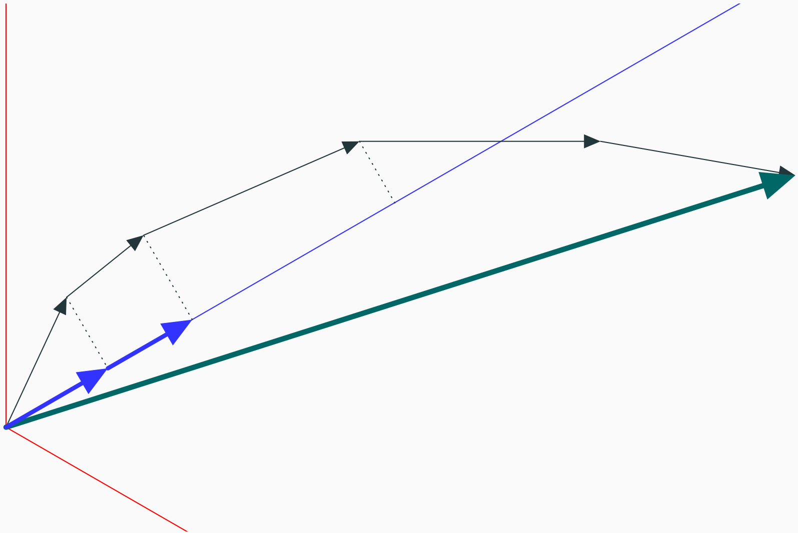
Az átlag általánosítása (1.)



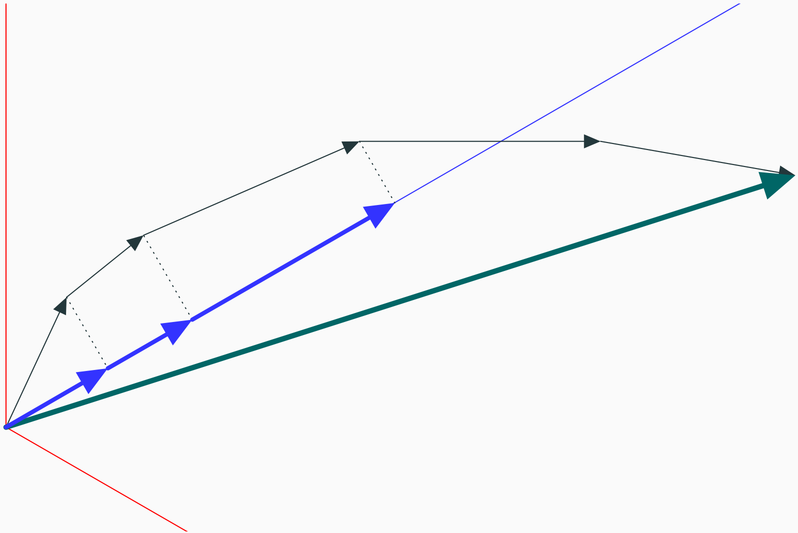
Az átlag általánosítása (1.)



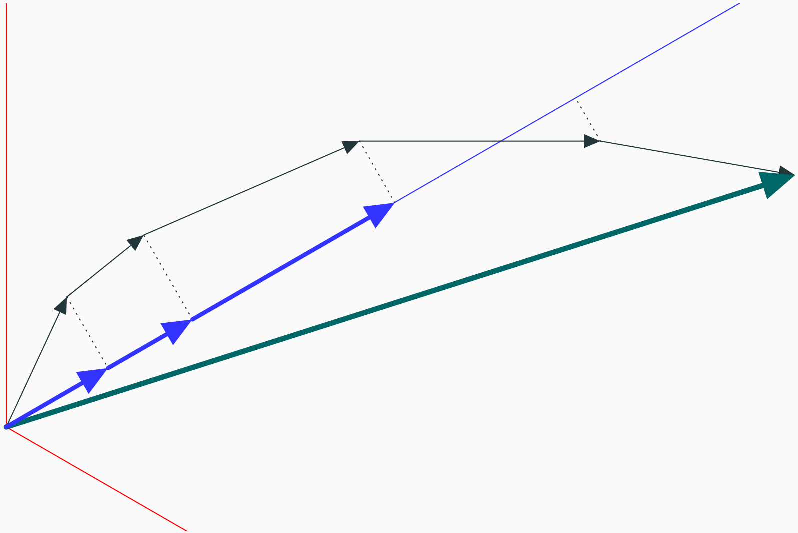
Az átlag általánosítása (1.)



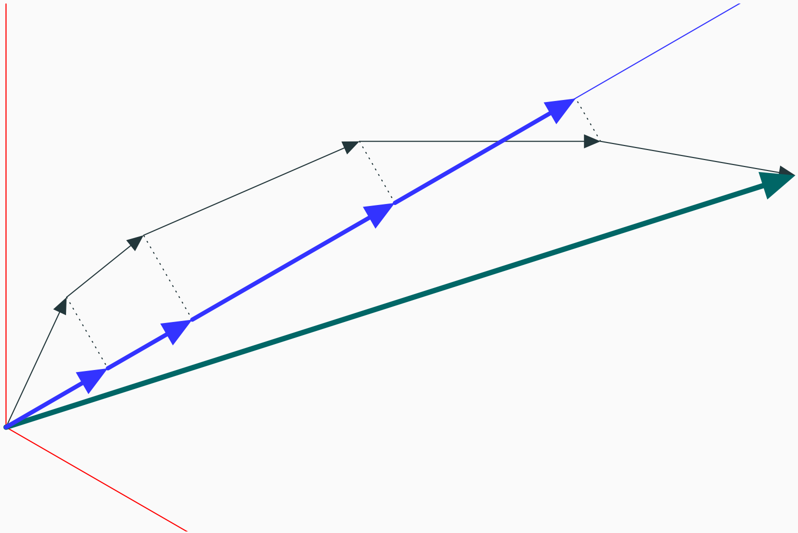
Az átlag általánosítása (1.)



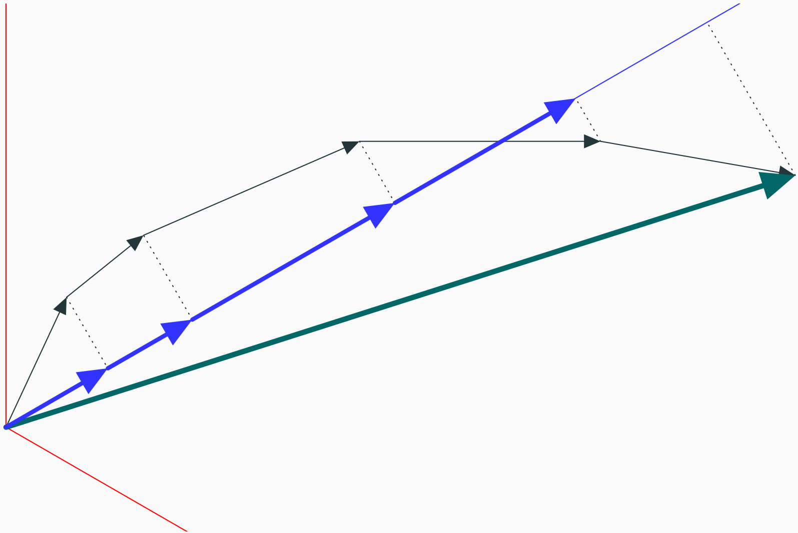
Az átlag általánosítása (1.)



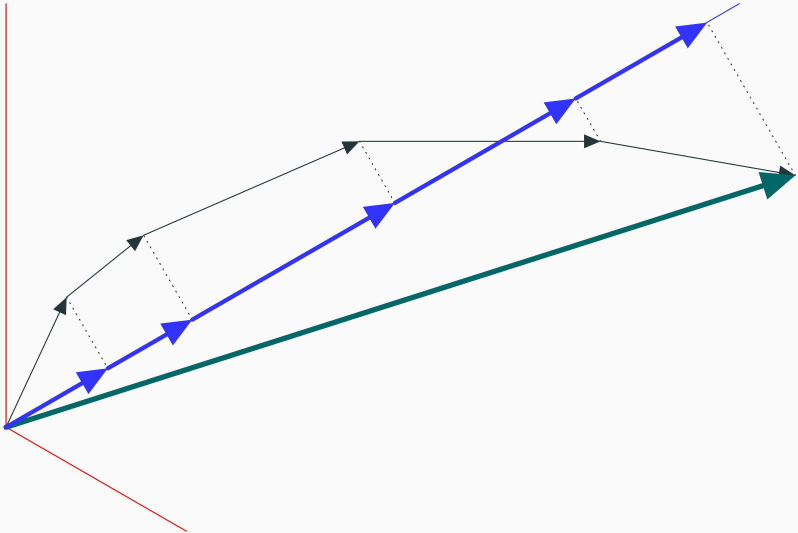
Az átlag általánosítása (1.)



Az átlag általánosítása (1.)



Az átlag általánosítása (1.)



Az átlag általánosítása (2.)

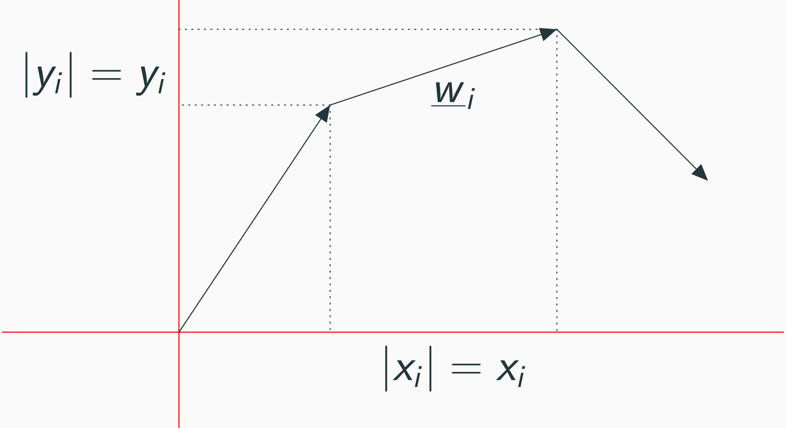
koordináta-rendszer: $\underline{v}_i(x_i; y_i)$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_i| + |y_i|\right) \leq |\underline{v}_i| \leq |x_i| + |y_i|}$$

- $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_i| + |y_i|\right) \leq |\underline{v}_i| \Leftrightarrow \frac{|x_i|+|y_i|}{2} \leq \sqrt{\frac{|x_i|^2+|y_i|^2}{2}}$
- $\underline{v}_i(x_i; y_i) = (x_i; 0) + (0; y_i)$

Az átlag általánosítása (2.)

$$\frac{1}{4} \leq \sum |\underline{w}_i| \leq \sum(|x_i| + |y_i|)$$



Az átlag általánosítása (2.)

$$\sum(x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i \geq \frac{1}{4}$$

$$\left|\sum \underline{w}_j\right| = \left|\left(\sum x_j; \sum y_j\right)\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sum x_j + \sum y_j\right) \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{6}$$

Az átlag általánosítása (3.)

Baran Zsuzsa dolgozata alapján

A vektorok hosszának összegére vonatkozó feltételből és a háromszög-egyenlőtlenségből

$$1 = \sum_{i=1}^{n} |\underline{v}_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + |y_i|\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$$

Az utolsó két összeg valamelyike nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Feltehető, hogy $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq \frac{1}{2}$.

Az átlag általánosítása (3.)

Az x_i koordináták előjele szerint osszuk két csoportra a vektorokat. (A 0 mehet a pozitívak közé.) Az egyik csoportban $\sum |x_j| \geq \frac{1}{4}$, hiszen összesen legalább $\frac{1}{2}$ az abszolútértékek összege. A folytatásban ezen csoport vektorait jelölje $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$. Tudjuk, hogy $k > 0$, mert nem nulla az összeg.

Az átlag általánosítása (3.)

A csoportban minden x koordináta azonos előjelű, ezért $\sum |x_j| = |\sum x_j|$.

$$|\sum \underline{w}_j| = |(\sum x_j; \sum y_j)| \geq |\sum x_j| = \sum |x_j| \geq \frac{1}{4}$$

Az átlag általánosítása (4.)

Mi történt eddig?

Az átlag általánosítása (4.)

Mi történt eddig?

- 3 skatulya, $|\underline{w}| \geq |\underline{w'}|$, $\boxed{\frac{1}{6}}$

Az átlag általánosítása (4.)

Mi történt eddig?

- 3 skatulya, $|\underline{w}| \geq |\underline{w'}|$, $\boxed{\frac{1}{6}}$
- 4 skatulya, $|\underline{w}(x; y)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|)$, $\boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}}}$

Az átlag általánosítása (4.)

Mi történt eddig?

- 3 skatulya, $|\underline{w}| \geq |\underline{w}'|$, $\boxed{\frac{1}{6}}$
- 4 skatulya, $|\underline{w}(x; y)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|)$, $\boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}}}$
- $2 \cdot 2$ skatulya, $|\underline{w}(x; y)| \geq |x|$, $\boxed{\frac{1}{4}}$

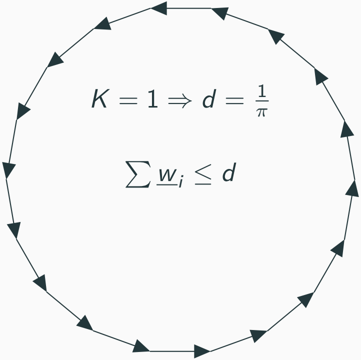
Az átlag általánosítása (4.)

Mi történt eddig?

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{6}$$

Az átlag általánosítása (4.)

Baran Zsuzsa heurisztikája: „Meddig mehetünk el?”



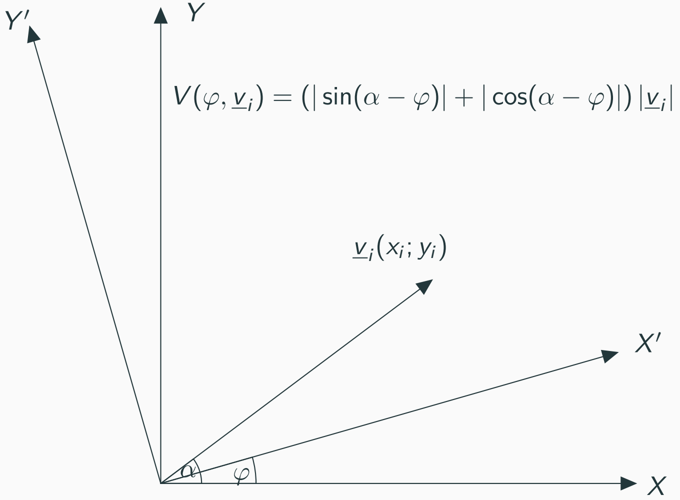
$$K = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{\pi}$$

$$\sum \underline{w}_i \leq d$$

Az átlag általánosítása (4.)

Williams Kada technikája, Baran Zsuzsa megoldásával kombinálva: „Átlagoljunk az összes lehetséges tengelyre!”

Az átlag általánosítása (4.)



Az átlag általánosítása (4.)

$$\int_0^{2\pi} V(\varphi, \underline{v}_i)\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} |\underline{v}_i| \cdot (|\sin(\alpha - \varphi)| + |\cos(\alpha - \varphi)|)\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= |\underline{v}_i| \cdot \left(\int_0^{2\pi} |\sin(\varphi)|\ \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi)|\ \mathrm{d}\varphi \right) =$$

$$= |\underline{v}_i| \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 4|\underline{v}_i| \cdot (-\cos\pi - (-\cos 0)) = 8|\underline{v}_i|$$

Az átlag általánosítása (4.)

Az összes vektorra összegezve:

$I = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{n} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi =$

$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} V(\varphi, \underline{v}_i)\,\mathrm{d}\varphi = 8\left(\sum_{i=1}^{n} |\underline{v}_i|\right) = 8$

$\exists \varphi \in [0; 2\pi] : \sum_{i=1}^{n} V(\varphi, \underline{v}_i) \geq \dfrac{8}{2\pi}$

Ezt a φ-t választjuk.

Az átlag általánosítása (4.)

Az előző megoldásban látott módon $\frac{8}{2\pi} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$, ezért végül a kiválasztott $\underline{w}_j$ vektorokra

$$|\sum \underline{w}_j| \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Az átlag általánosítása (4.)

További érdekességek az átlagértékről:

`http://matektabor.berzsenyi.hu/2013`

12. évfolyam: *Az átlagérték* (Y. Ionin, A. Plotkin: The Mean Value of a Function)

Köszönöm a figyelmet!