Valahol már láttam…

Erdős Gábor, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

Ha valaki irodalomról akar beszélni, kell, hogy ismerjen néhány verset. Ha valaki történelemmel akar foglalkozni, vannak események, amelyekről tudnia kell. Ha valaki matematikai feladatokat akar sikeresen megoldani, vannak olyan alapfeladatok, amiknek megoldási ötletét ismernie kell. Az előadáson hét ilyen alapfeladatot mutatok be, majd néhány hozzá kapcsolódó olyan feladatot, amelyek megoldása az alapfeladatnál megtanult ötlet nélkül nagyon nehéz. Sem az alapfeladatok, sem a hozzájuk köthető feladatok válogatásánál nem törekedtem a teljességre, talán nem is lehet. Főleg azért nem, mert biztos nem hét olyan feladat van, aminek az ismerete nélkül nem lehet a siker reményében elmenni például egy versenyre. Sokkal több ennél. Kívánom mindenkinek, hogy bővítse a kört akkorára, amivel tanítványai már sikeresek lehetnek.

Első alapfeladat: Mennyi a következő összeg értéke: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$?

Megoldás: Ezt a feladatot középiskolában nagyon sok tanár használja, elsősorban a teljes indukció tanítására. Jó a feladat ebből a szempontból is, hiszen ha megnézünk néhány kezdeti esetet, akkor elég hamar kialakulhat a sejtés: n tag esetén az összeg értéke $\frac{n}{n+1}$. Fontos azonban megjegyezni a következőt. Ha mondjuk egy hetedik osztályos rájön erre, majd ezt alkalmazva közli, hogy a feladat eredménye $\frac{99}{100}$, akkor ez nagyon szép teljesítmény tőle, de nem teljes értékű megoldás. A sejtést ugyanis bizonyítani kell. Na de hogy lehet egy ilyen sejtést bizonyítani? Leginkább teljes indukcióval. Ne de egy hetedikestől elvárjuk, hogy használjon teljes indukciót? Nem, szó sincs erről, de ha nem bizonyít egy sejtést, attól még akármekkora, az a megoldás erősen hiányos! Hogy van reménye akkor mondjuk egy hetedikesnek? Úgy, ha ismeri a teleszkópos összegek technikáját, melynek bemutatására én ezt a feladatot szoktam használni. Nézzük most a megoldást ezzel az eszközzel.

Észrevehetjük, hogy $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{2-1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{4-3}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, és így tovább. Én itt mondjuk egy hetedikessel szemben tennék egy engedményt, nem várnám el, hogy az általános tag felírásával igazolja ezt az összefüggést, bár nyilván az lenne a tökéletes megoldás. Ezeket az átalakításokat végezzük el mindegyik törttel, így a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

Azt használtuk ki, hogy minden zárójel második tagjának az ellentettje szerepel a következő zárójel első tagjaként, így összegük nulla, ezek „kiesnek”. Egyre rövidebb lesz a kifejezés, mint egy teleszkóp, amikor összenyomjuk, végül csak az első zárójel első és az utolsó zárójel második tagja marad.

Feladat: Melyek azok az n egész számok, amelyekre $\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^2-1\right)\cdot\left(4^2-1\right)\cdot...\cdot\left(n^2-1\right)$ négyzetszám, ha tudjuk, hogy $4<n<100$?

A feladat egy átfogalmazása a Kenguru-verseny 2009. évi 9-10. osztályos 24. feladatnak.

Megoldás: Használjuk fel a két szám négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot:

$$\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^2-1\right)\cdot\left(4^2-1\right)\cdot...\cdot\left(n^2-1\right)=$$
$$=\left(2-1\right)\cdot\left(2+1\right)\cdot\left(3-1\right)\cdot\left(3+1\right)\cdot\left(4-1\right)\cdot\left(4+1\right)\cdot...\cdot\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)=$$
$$=1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 6\cdot.....\cdot\left(n-3\right)\cdot\left(n-1\right)\cdot\left(n-2\right)\cdot n\cdot\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)=$$
$$=1\cdot 2\cdot\left(3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot...\left(n-2\right)\cdot\left(n-1\right)\right)^2\cdot n\cdot\left(n+1\right)$$

A középső nagy zárójelben található számok négyzetszámok. Ahhoz, hogy az egész kifejezés értéke négyzetszám legyen, arra van szükség, hogy a többi tényező szorzata, vagyis $1\cdot 2\cdot n\cdot(n+1)$ is négyzetszám legyen. Mivel az n és az n+1 szomszédos számok, így relatív prímek, így az egyik négyzetszám kell legyen, a másik egy négyzetszám fele. Azt is tudjuk, hogy négyzetszám fele nem lehet páratlan, mert egy négyzetszám 4-gyel osztva nem adhat 2-t maradékul. Vagyis a két szomszédos szám egyike egy páratlan négyzetszám, amelynek egyik szomszédja egy négyzetszám fele. Elég tehát a 9, 25, 49 és 81 számok szomszédjai közül megkeresni, melyiknek a kétszerese négyzetszám. A nyolc szám közül két ilyent találunk: a 8 kétszerese 16, valamint az 50 kétszerese 100. Az n értéke tehát csak 8 vagy 49 lehet.

Feladat: Add meg a következő, 63 tagú összeg értékét olyan közönséges tört formájában, amely tovább nem egyszerűsíthető!

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+63}=?$$

Mennyi lesz ebben a törtben a számláló és a nevező szorzata?

A feladatot Dr. Bencze Mihály javaslata alapján tűztük ki idén, az 5-8. osztályosok III. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyén, Kecskeméten, ez volt a 7. osztályosok 2. fordulójának 3. feladata.

Megoldás: Tudjuk (például a kis Gauss módszerével), hogy $1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Írjuk be ezt mindegyik tört nevezőjébe, majd bővítsük a törteket 2-vel, végül emeljünk ki 2-t. A feladatban szereplő összeg ezen átalakítások után így fog kinézni:

$$K=2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{63\cdot 64}\right)$$

A törtek mindegyike felírható két tört különbségeként, például $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{4-3}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

A zárójelen belüli összeg minden tagját bontsuk fel ezt felhasználva.

$$\frac{K}{2}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{63}-\frac{1}{64}\right)$$

Észrevehetjük, hogy (az utolsó zárójelet kivéve) mindegyik tört, amely valamelyik zárójelen belül a második helyen áll mínusz előjellel, az szerepel a következő zárójelen belül az első helyen plusz előjellel. Ha a zárójeleket felbontjuk, akkor ebben az úgynevezett teleszkópos összegben szinte minden tag kiesik, csak az első plusz és az utolsó mínusz előjelű tag marad meg. $\frac{K}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$, tehát $K=2\cdot\frac{63}{64}=\frac{63}{32}$. Mivel a 63 és a 32 relatív prímek, így ez a tört már nem egyszerűsíthető, a számláló és a nevező szorzata pedig $63\cdot 32=2016$.

Feladat: Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x 2-nél nagyobb természetes szám:

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2015\cdot(2x+1)}{2x}.$$

A feladat a 2015/16 évi matematika OKTV II. kategóriájában az első forduló 5. feladata volt.

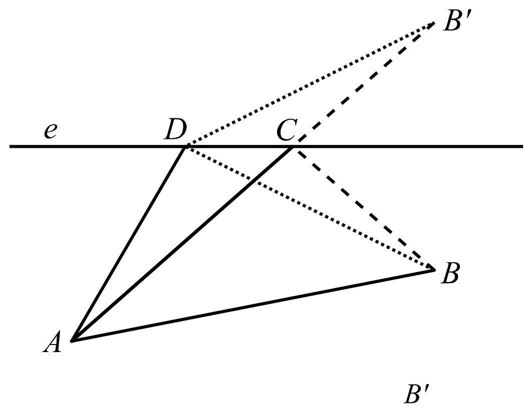
Megoldás: Ügyesebb nyolcadik osztályosokkal már elvégezhető az utolsó, általános tagban a gyök alatti kifejezés közös nevezőre hozása, majd további átalakítások után a gyök alatti kifejezés egy teljes négyzet: $1+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}=\left(1+\frac{1}{(x-1)\cdot x}\right)^2$. Ezt mindegyik tagban kihasználva, majd a gyökvonást elvégezve az 1-esek összege $x-2$, hiszen ennyi tag van, a törtek összege pedig:

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(x-1)\cdot x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{x-2}{2x}.$$

Az összegzésre ezúttal is a teleszkópos összeget használtuk. A teljes indukciós bizonyítás nehézsége az első tag hiánya volt, így a képlet megsejtése nehezebb volt, mint az alapfeladat esetében. Az egyenlet megoldása innen már könnyedén befejezhető, a megoldás $x = 2017$.

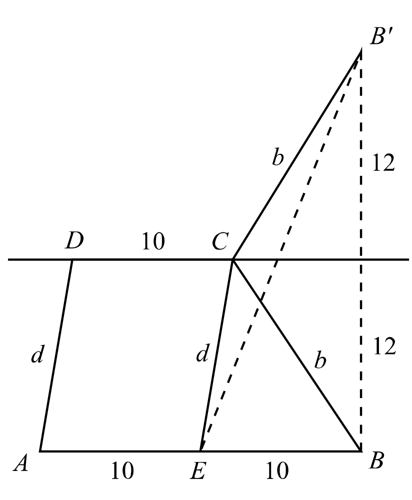
Második alapfeladat: Adott az *e* egyenes és az egyenes egyik oldalán az *A* és a *B* pontok. Szerkesszük meg azt az *ABC* háromszöget, amelynek a *C* csúcsa az *e* egyenesen van, és az ilyen tulajdonságú háromszögek közül a legkisebb a kerülete!

Megoldás: A feladatot így szoktam elmesélni, 6. osztályban, amikor a tengelyes tükrözést tanítom: Piroska eldönti, hogy elmegy nagyihoz, és visz neki egy csokor virágot. De a legszebb virág a patakparton terem, így lesétál a partra, majd onnan megy a nagyihoz. A patakparton mindenhol nőnek a virágok. Hova menjen, hogy a leggyorsabban odaérjen a nagyihoz? Fontos: ne egy vödör vizet vigyen, mert akkor egy elég nehéz szélsőérték-feladatot kaptunk, hiszen a teli vödörrel nehezebb menni, mint az üressel! Visszaverődés helyett fénytöréshez vezető problémát generálunk, amelynek a megoldása általános iskolai szinten nagyon nehézkes…



Tükrözzük a *B* pontot az *e* egyenesre, jelöljük a tükörképet *B'*-vel. Mivel a tükrözés távolságtartó, így az *e* egyenes bármely pontját *B*-vel és *B'*-vel összekötve ugyanolyan hosszú szakaszokat kapunk. Ez viszont azt jelenti, hogy az *A*-ból az *e* egyenes valamely pontján át *B*-be vezető töröttvonal hossza ugyanakkora, mint az *A*-ból az *e* ugyanazon pontján át a *B'*-be vezető töröttvonal hossza. Ebből viszont az következik, hogy a keresett *C* pont nem más, mint az *AB'* egyenes és az *e* egyenes metszéspontja. Gyakori, hogy a gyerekek versenyen ezt már természetesnek veszik, pedig ezt illik megfelelően indokolni. Például így: lássuk be, hogy ha az *e* egyenesnek az előbb definiált *C*-től különböző *D* pontját választjuk, akkor a háromszög kerülete nagyobb lesz. Használjuk ki, hogy a háromszög-egyenlőtlenség miatt az *AB'D* háromszögben $AB' < AD + DB'$. Így $AC + CB = AC + CB' = AB' < AD + DB' = AD + DB$. (Az *AB* szakasz hossza minden esetben szerepel a kerületben, így ezzel nem foglalkoztunk.). Még egy módszertani megjegyzés: a feladatban egy töröttvonal hossza szerepelt. Az ilyen jellegű feladatokban gyakori törekvésünk, hogy ezt a töröttvonalat megpróbáljuk kiegyenesíteni. Ezt érdemes kihangsúlyozni. Fontosnak gondolom, hogy a tanár emelje ki egy megoldott feladat kapcsán, mit tart fontosnak, megjegyzésre érdemesnek a látott ötletekből. A cél az, hogy az ilyen jellegű, címkézett memorizálás a gyerekek sajátjává váljon.

Feladat: Legalább mekkora egy olyan trapéznak a kerülete, melynek alapjai 10 cm és 20 cm hosszúak, magassága 12 cm?

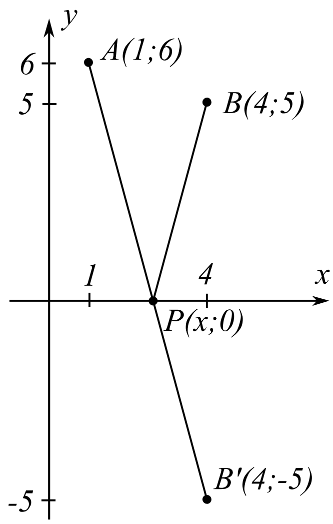


Megoldás: Legyen az *AB* alap hossza 20 cm, a *DC* alapé pedig 10 cm. Húzzunk párhuzamost a *C* ponton át az *AD* oldallal, ennek metszéspontja az *AD*-vel *E* pont (ami egyébként éppen az *AB* felezőpontja). Mivel az alapok hossza ismert, a szárak összegének a minimumát keressük. Mivel $EC = AD = d$, így a keresett $b + d$ nem más, mint az *ECB* töröttvonal hossza, így valójában visszavezettük a feladatot az alapfeladatra, tehát használhatjuk az ott látott ötletet. Ez azt jelenti, hogy $b + d \geq EB'$. Az EB' szakasz hossza pedig kiszámolható Pitagorasz-tétel segítségével az EBB' derékszögű háromszögben, $EB' = \sqrt{10^2 + 12^2} = 26$ cm. A trapéz kerületének minimuma 56 cm.
Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy trapéznál gyakori trükk, hogy vágjuk szét egy paralelogrammára és egy háromszögre.

Feladat: Határozd meg az $f(x)=\sqrt{x^2-2x+37}+\sqrt{x^2-8x+41}$ függvény minimumának helyét és értékét!

Megoldás: Végezzük el a gyökjel alatt a teljes négyzetté kiegészítést:

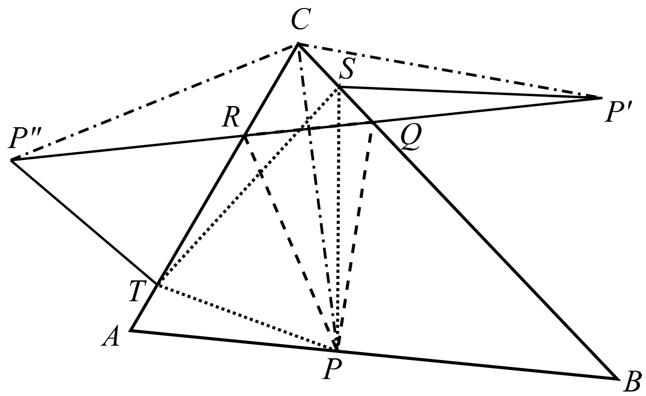
$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+6^2}+\sqrt{(x-4)^2+5^2}.$$



Mindkét gyökös kifejezés egy négyzetösszeg gyöke, ami emlékeztet a Pitagorasz-tételre. Olyan, mintha egy derékszögű háromszög átfogóját számoltuk volna ki. Másképpen megfogalmazva: olyan, mintha két pont távolságát számoltuk volna ki a koordináta-rendszerben. Valóban, ha $A(1;6)$ és $P(x;0)$, akkor $AP=\sqrt{(x-1)^2+6^2}$, ha pedig $B(4;5)$, akkor $PB=\sqrt{(x-4)^2+5^2}$. Ekkor $f(x)$ értéke nem más, mint az *APB* töröttvonal hossza, ahol *A* és *B* rögzített pont, *P* pedig az *x* tengely tetszőleges pontja. Keressük a töröttvonal hosszának a minimumát. Ez nem más, mint az alapfeladat, így *f* minimuma az *AB'* szakasz hossza, amely Pitagorasz-tétellel számolva $\sqrt{130}$. Az *x* értéke kiszámolható hasonlóságok segítségével is, de az elsőfokú függvényt korábban tanítjuk. Két pontból írjuk fel annak a lineáris függvénynek az egyenletét, amely átmegy az *A* és a *B'* pontokon. A meredekség közvetlenül leolvasható, $-\frac{11}{3}$. Kihasználva, hogy áthalad az *A* ponton, a függvény hozzárendelési szabálya $g(x)=-\frac{11}{3}x+\frac{29}{3}$. Ennek a zérushelye $x=\frac{29}{11}=2\frac{7}{11}$, Ami nem más, mint a *P* pont első koordinátája, vagyis az *f* függvény minimumhelye.

Feladat: Legyen az *ABC* háromszög *AB* oldalának egy tetszőleges belső pontja *P*. Határozzuk meg a *Q* és *R* pontokat úgy, hogy *Q* a *BC*, *R* a *CA* szakasz belső pontja legyen, és az így kapott *PQR* háromszög kerülete minimális legyen!

Megoldás: Mivel ez az anyag elsősorban matematikatanárok részére készül, csak a gondolatmenetet ismertetem, nem a teljes megoldást. Tükrözzük a *P* pontot a *BC* és az *AC* egyenesekre, ezzel a keresett háromszögeket „kihajtogattuk”. Állítás: a *P’P”* szakasz kimetszi a keresett *Q* és *R* pontokat. Hasonlítsuk össze ugyanis az ettől különböző *PST* háromszög kerületét a *PQR* háromszög kerületével. Előbbi egyenlő a *P’STP”* töröttvonal hosszával, utóbbi pedig a *P’P”* szakasz hosszával, amely nyilván kisebb.



Mely *P* pontra lesz ez a kerület minimális? Mivel $CP=CP'=CP''$, továbbá a *CP’P’’* egyenlő szárú háromszög szárszöge az *ACB* szög kétszerese, vagyis állandó, így a *P’P’’* szakasz hossza, vagyis a *PQR* háromszög kerülete akkor lesz minimális, ha *CP* hossza minimális, vagyis ha *P* a magasság talppontja. Belátható, hogy ekkor *Q* és *R* is a magasságok talppontjai, így a háromszögbe írt háromszögek közül az úgynevezett talpponti háromszög kerülete a legkisebb.

Harmadik alapfeladat: Egy 5 egység élhosszúságú fakocka felületét pirosra festjük, majd a lapjaival párhuzamos síkokkal 1 egység élhosszúságú kis kockákra daraboljuk. Az így kapott kockák közül hánynak lesz 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 piros lapja?

Megoldás: Nyilván 6, 5, 4 lapja egyik kis kockának sem lesz piros. A piros lapok száma maximum 3, ez azokra a kockákra igaz, amelyek eredetileg a nagy kocka csúcsainál voltak, vagyis ezek száma 8. A piros lapok száma akkor 2, ha a kis kocka valamely él mentén helyezkedett el, de nem a csúcsnál. Egy él mentén 3 ilyen kocka található, továbbá a kockának 12 éle van, vagyis az ilyen kis kockák száma összesen 36. Egy piros lapja azoknak a kis kockáknak van, amelyek a nagy kocka felületén, de nem is az éleknél és nem is a csúcsoknál voltak. Minden lapon $3 \cdot 3 = 9$ ilyen kocka található, így mivel a kockának 6 lapja van, összesen $6 \cdot 9 = 54$ ilyen kis kocka található. Végül 0 piros lapja az eredetileg a nagy kocka belsejében elhelyezkedő kis kockáknak van. Ezekhez hozzájutunk, ha a nagy kocka külső rétegét lefejtjük, így $3^3 = 27$ ilyen kis kocka van. Ellenőrzés: összesen nyilván $5^3 = 125$ kis kocka van, és $8 + 36 + 54 + 27 = 125$.

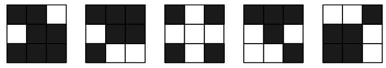
Feladat: Azonos méretű kis kockákból egy nagy kockát készítettünk, majd a külsejét zöldre festettük. Amikor a festék megszáradt, újra szétszedtük a nagy kockát. 24 olyan kis kockát találtunk, amelynek pontosan két oldala lett zöldre festve. Hány olyan kocka van, amelynek nincs zöld oldala?

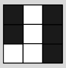
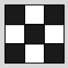
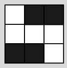
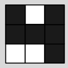
A feladat a www.microprof.hu internetes tesztversenyén szerepelt, az idei májusi feladatsorban az 5-6. osztályosok 27. feladata volt. A folytatásban a honlapon is olvasható vázlatos megoldást ismertetjük. A felhasználók részére minden 5 pontos feladat megoldása elérhető.
Megoldás: A szétvágás után a kis kockáknak 0, 1, 2 vagy 3 zöld lapja lehet. Azoknak van 0, amelyek a kocka belsejében voltak, azoknak lesz 1, amelyek valamelyik lapon, de nem az élek mentén voltak. Azoknak lesz 2, amelyek valamelyik élnél helyezkedtek el, de nem a csúcsnál, végül azoknak lesz 3, amelyek valamelyik csúcsnál találhatók. Mivel a kockának 12 éle van, és most 24 olyan kocka keletkezett, amely eredetileg valamelyik él mentén helyezkedett el, így minden él mentén 2 ilyen kocka volt, a két olyan kocka között, amelyik a nagy kocka valamelyik csúcsánál volt. Vagyis ha a kis kocka élhossza 1 egység, akkor a nagy kockáé 4, tehát a nagy kocka $4^3 = 64$ kis kockából áll. Ha erről lefejtjük a külső réteget, amin vannak zöld lapok, akkor egy $2^3 = 8$ kis kockából álló rész marad, ennek a 8 kis kockának nem lesz zöld lapja.

Feladat: Petinek van 4 fehér és 23 zöld színű, 1 cm élhosszúságú kis kockája, amelyekből (az összeset felhasználva) a lehető legtöbb napon keresztül minden nap összerakott egy-egy 3 cm élhosszúságú kockát. Az egyetlen feltétel az volt az összerakásra, hogy semelyik nap sem készíthetett olyan kockát, amelynek felületén ugyanannyi négyzetcentiméter a zöld színű területek együttes nagysága, mint valamelyik korábbi napon. Az első kockát május elsején rakta össze. Melyik napon készítette az utolsót?

A feladatot Juhász Nándor javaslata alapján tűztük ki idén, az 5-8. osztályosok III. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyén, Kecskeméten, ez volt a 6. osztályosok 1. fordulójának 3. feladata.
Megoldás: Fehér kockából van kevesebb, így egyszerűbb a nagy kocka felületén a fehér részek területével foglalkozni, hiszen ha az minden nap különböző lesz, akkor a zöld részeké is. Ha egy fehér kocka a nagy kocka sarkához kerül, akkor annak 3 lapja látszik. Ha az egyik él közepénél áll, akkor 2 lapja látszik. Ha valamelyik lap közepén áll, akkor 1 lapja látszik, végül ha a kocka közepén áll, akkor egy lapját sem lehet látni. Nevezzük a folytatásban az egyszerűség kedvéért az előbb említett típusú kockákat rendre sarok-, él-, lap- és belső kockáknak. A legkevesebb fehér lap akkor látszik, ha az egyik fehér kocka belső kocka, a másik három pedig lapkocka, ekkor a látható fehér lapok száma. $1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$. A legtöbb fehér lap pedig akkor látszik, ha 4 fehér sarokkockát használunk, ekkor a látható fehér lapok száma $4 \cdot 3 = 12$. Ezek szerint a fehér lapok száma legalább 3 és legfeljebb 12, tehát 10-nél több napon keresztül biztosan nem lehet megvalósítani a tervet.
Ahhoz, hogy 10 napon keresztül valóban meg is lehessen valósítani a tervet, még azt is be kell látni, hogy a fehér lapok száma minden 3 és 12 közötti egész értéket felvehet. Első nap rakjuk ki a legkevesebb fehér lapot adó elrendezést. Második napon a belső kockát rakjuk át lapkockává, így már 4 fehér lap látható. A következő 4 napon mindig egy lapkockát helyezzünk át élkockává, így minden nap 1-gyel növeljük a látható fehér lapok számát. Ebben a négy napban rendre 5, 6, 7, 8 fehér lap látható. A négy utolsó napban pedig mindig egy élkockát rakjunk át sarokkockává. Ezen napokon így rendre 9, 10, 11, 12 fehér lap lesz látható. Peti május 10-én készítette az utolsó kockát.

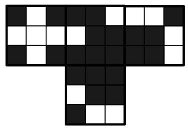
Feladat: Egyforma méretű kis kockákból egy 3×3×3-as kockát ragasztottunk össze. A kis kockák közül 15 fekete volt, 12 pedig fehér. A jobb oldali ábrán a kocka 5 lapját látod. Melyik a kocka hatodik lapja?



A)  B)  C)  D)  E) 

A feladat idén szerepelt a Kenguru-versenyen, ez volt a 7-8.osztályosok 30. feladata.

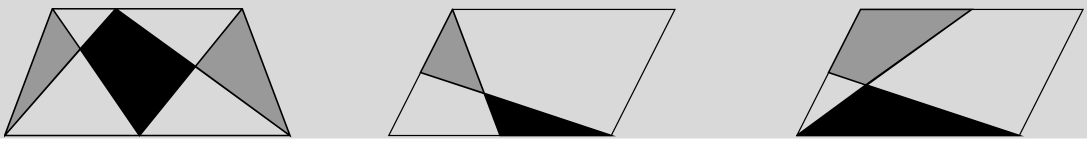
Megoldás: Az öt lap közül a harmadik és az ötödik nem lehet szomszédos, mivel a harmadiknak minden csúcsánál fekete kocka van, az ötödiknek viszont nincs két szomszédos csúcsa, ahol fekete kocka van. Ezek a lapok tehát egymással szemben lesznek. Hogy lehet ezeket a lapokat az első ábrán látható laphoz illeszteni? A harmadikat csak a bal oldalához, az ötödiket meg a jobb oldalához. A fel nem használt két lap közül legalább az egyiknek mindhárom eddig használt lappal szomszédosnak kell lennie. De csak a második illeszthető oda, az ábrán látható módon (alulról). A válaszok közül az A és az E jelűt lehet a középső laphoz felülről hozzáilleszteni, mindkét esetben a középső lappal szemben elhelyezhető a még fel nem használt negyedik lap. Megszámolható, hogy a sarokkockák közül 6 fekete, az él mentén található kockák közül 5 fekete, a lapok közepén lévők közül pedig 4 biztosan fekete. Ez eddig már 15 fekete kocka, azaz több nem lehet. Következésképpen a test közepén is, továbbá a kérdezett lap közepén is fehér kocka található, tehát a két versenyben maradt válasz közül az A lesz a helyes.



Negyedik alapfeladat: Bizonyítsd be, hogy egy trapéz átlóinak metszéspontja és egyik szára ugyanakkora területű háromszöget határoz meg, mint az átlók metszéspontja és a másik szár!

Megoldás: Egészítsük ki mindkét háromszöget az átlók és valamelyik alap által alkotott háromszöggel. Az így kapott háromszögek alapja és magassága is megegyezik, így területük egyenlő. Elvéve belőle, amit hozzávettünk, egyenlők is maradnak.

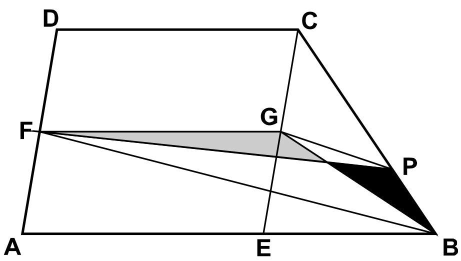
Feladat: Bizonyítsd be, hogy az ábrákon szürkével és feketével jelölt területek egyenlők!



Megoldás: Az első ábrán kössük össze a fekete négyszög alapokon fekvő csúcsait. Ha itt kettévágjuk a trapézt, mindkét felén használhatjuk az alapfeladat eredményét.
A második ábrán a kisebbik fehér négyszöggel egészítsük ki őket. Olyan háromszögekhez jutottunk, amelyeknek a területe egyaránt a paralelogramma területének a negyede. Máshogy: a paralelogramma bal felső és jobb alsó csúcsát összekötjük egy átlóval, továbbá összekötjük a két felezőpontot is. Utóbbi párhuzamos az előzővel és fele olyan hosszú, mert középvonal. Ekkor viszont egy trapézt kaptunk, amire alkalmazhatjuk az alapfeladat megoldását.
A harmadik ábrán a fehér háromszöget hozzájuk véve alkalmazhatjuk az előző ábránál leírt első megoldást.

Feladat: Adott egy trapéz. Az egyik szárának felezőpontján át szerkesszünk olyan egyenest, amely a trapéz területét felezi!

Megoldás: Ez a feladat kiváló példa arra, amiről az egész előadás szól. A megoldás szinte reménytelen, ha az alapfeladatot nem ismerjük! Osszuk fel a CE szakasszal a trapézt egy paralelogrammára és egy háromszögre. Legyen G a CE felezőpontja. FG középvonal felezi a paralelogramma területét, GB súlyvonal pedig a háromszögét. Ez azt jelenti, hogy az FGB töröttvonal felezi a trapéz területét. Ezt kelle-



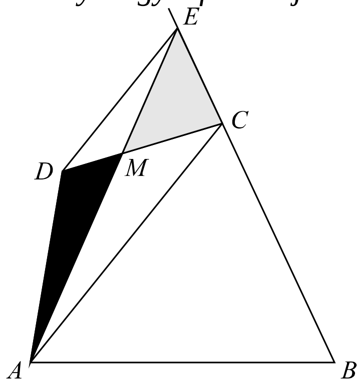
ne kiegyenesíteni egy *FP* szakasszá. Az kellene, hogy a szürke háromszög területe, amivel a töröttvonal alatti részt csökkentjük, megegyezzen a feketével, amivel ugyanezt a részt megnöveljük. Az alapfeladat alapján a két terület egyenlő lesz, ha *FBPD* egy trapéz. Hát akkor legyen az! Vagyis a szerkesztés: *FB*-vel húzzunk párhuzamost *G*-n át, ahol ez metszi a *BC* szárat, ott lesz a *P* pont. *FP* a keresett területfelező szakasz.

Feladat: Az *ABCD* konvex négyszög *D* csúcsán át párhuzamost húzunk az *AC* átlóval. Ez az egyenes a *BC* oldal *C*-n túli meghosszabbítását *E* pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy az *ABE* háromszög és a *ABCD* négyszög területe megegyezik!

A feladat 8. osztályosok részére volt kitűzve a Varga Tamás Matematikaverseny megyei fordulóján.

Megoldás: Mivel *DE* és *AC* párhuzamosak, ezért az *ACED* négyszög egy trapéz, amelyre igaz az alapfeladat állítása, vagyis a fekete és szürke háromszögek területe egyenlő, azaz $t_{AMD} = t_{EMC}$.

Mivel $t_{ABE} = t_{ABCM} + t_{EMC}$, továbbá $t_{ABCD} = t_{ABCM} + t_{AMD}$, vagyis az *ABCM* négyszög területéhez egyik esetben az *EMC*, másik esetben a vele egyenlő területű *AMD* háromszög területét vesszük hozzá, ezért az így kapott alakzatok is egyenlő területűek: $t_{ABE} = t_{ABCD}$.



Ötödik alapfeladat: Mennyi a 2^{2016} hatvány értékének utolsó számjegye?

Megoldás: A 2 hatványainak utolsó számjegyei periodikus sorozatot adnak, melynek periódusa 4, hiszen az utolsó számjegyek rendre 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, … Mivel a 2016 osztható 4-gyel, így a vizsgált hatvány utolsó számjegye 6.
Több tényt érdemes – több ilyen feladat vizsgálata után – erősíteni a gyerekekben. Az egyik az, hogy az utolsó számjegy, valamint a páros-páratlan tulajdonság nem más, mint osztási maradék. A másik, hogy a hatványok osztási maradékai bármely számmal osztva kénytelenek periodikusan ismétlődni, egyrészt mert véges sok maradék van, másrészt mert minden maradék meghatározza a következőt. Utóbbihoz persze igazolni kellene, hogy összeg és szorzat maradéka nem más, mint a maradékok összege, illetve szorzata (mod *n*). Ez 7-8. osztályban jó algebrai gyakorló feladat, aminek legalább van valami célja, de kisebbekkel is beláthatjuk, területekkel okoskodva. És egy harmadik, említésre és erősítésre érdemes tény: ha a feladatban szerepel egy nagy szám, akkor kezdjük kis esetekkel a vizsgálatot, vegyünk észre szabályt, azt próbáljuk bizonyítani, majd alkalmazzuk.

Feladat: Lehet-e egyenlő két egymást követő egész szám szorzatával $3^{2015}+1$?

Megoldás: A 3 hatványainak utolsó számjegyei is négyes periódust mutatnak: 3, 9, 7, 1. Mivel a 2015 négyes maradéka 3, így a hatvány utolsó számjegye 7, az összegé pedig 8. Mivel két egymást követő egész szám szorzatának utolsó számjegye csak 0, 2 vagy 6 lehet, 8 pedig nem, így a feladatban szereplő összeg nem lehet két szomszédos egész szorzata.

Feladat: Egy sorozat első tagja 4, a második 6. A harmadiktól kezdve minden tag az előzőnek és az azt megelőzőnek a hányadosa. Mennyi a sorozat első 2016 tagjának összege?

Megoldás: Számoljuk ki a sorozat első néhány tagját: 4, 6, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, 4, 6, … Mivel két tag, a 4 és a 6 ismétlődött, és két tag meghatározza a következőt, így a sorozat periodikus, a periódusának a hossza 6. Egy perióduson belül a tagok összege $\frac{31}{12}$. Mivel $2016 = 336 \cdot 6$, ezért az első 2016 tag 336 periódust alkot, ezért az első 2016 tag összege $336 \cdot \frac{31}{12} = 868$.

Feladat: Melyek azok az egyjegyű, 1-nél nagyobb pozitív egész számok, amelyekkel a következő tört nem egyszerűsíthető: $\frac{4^{2016}+5^{2017}+6^{2018}}{4^{2017}+5^{2018}+6^{2019}}$?

A feladatot Dr. Bencze Mihály javaslata alapján tűztük ki idén, az 5-8. osztályosok III. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyén, Kecskeméten, ez volt a 8. osztályosok 2. fordulójának 3. feladata.

Megoldás: Mivel a számláló és a nevező is páratlan, így páros számmal biztosan nem lehet egyszerűsíteni a törtet, elég a páratlan számokat vizsgálni.
Nézzük elsőként a 3-at. A 6 hatványai oszthatók 3-mal, így elég a másik két hatványt vizsgálnunk. Mivel a 4-nek a 3-as maradéka 1, így minden hatványa is 1 maradékot ad 3-mal osztva. Az 5 hatványainak 3-as maradékát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a páratlan kitevőjű hatványok 2, a párosak pedig 1 maradékot adnak. Ez a 4 hatványairól elmondottakkal együtt azt jelenti, hogy a számláló osztható 3-mal, a nevező viszont nem, mert 2 maradékot ad. Ha viszont a nevező nem osztható 3-mal, akkor nem osztható 9-cel sem.
Vizsgáljuk az 5-tel való oszthatóságot. Az 5 hatványai oszthatók 5-tel, így elég a 4 és a 6 hatványait vizsgálnunk. A 6-nak az 5-ös maradéka 1, így minden hatványa 1 maradékot ad. Az 4 hatványainak 5-ös maradékát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a páratlan kitevőjű hatványok 4, a párosak pedig 1 maradékot adnak. Ez a 6 hatványairól elmondottakkal együtt azt jelenti, hogy a nevező osztható 5-tel, a számláló viszont nem, mert 2 maradékot ad.
Már csak egy lehetőségünk maradt, a 7, vizsgáljuk a 7-es maradékokat. A 6 páratlan kitevős hatványai 6, a párosak 1 maradékot adnak, vagyis a számlálóban 1, a nevezőben 6 az ott szereplő 6-hatvány 7-es osztási maradéka. A 4 hatványainak 7-es maradékai hármasával ismétlődnek (4, 2, 1), így a számlálóban szereplő 4-hatvány 7-es maradéka 1, a nevezőben szereplőé pedig 4. Az 5 hatványainak 7-es maradékai pedig hatosával ismétlődnek (5, 4, 6, 2, 3, 1), így a számlálóban szereplő 5-hatvány 7-es maradéka 5, a nevezőben szereplőé pedig 4. Mivel a kapott maradékok összege a számlálóban $1+5+1=7$, a nevezőben pedig $4+4+6=14$, ezért mindkettő osztható 7-tel, így a törtet 7-tel lehet egyszerűsíteni. Azt pedig már korábban láttuk, hogy más 1-nél nagyobb egyjegyű számmal nem.

Hatodik alapfeladat: Bizonyítsuk be, hogy egy hat fős társaságban vagy van három olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy van három olyan ember, akik közül semelyik kettő nem ismeri egymást!

Megoldás: Az úgynevezett Ramsey-problémakör alapfeladata. Átfogalmazva: ha egy 6-csúcsú teljes gráf éleit 2 színnel színezzük, akkor van egyszínű háromszög. Vegyünk egy tetszőleges csúcsot. Az ebből induló élek közül van legalább 3 egyforma színű, mondjuk piros. Ha ezek végpontjai közül kettőt piros él köt össze, akkor van piros háromszög, ha minden él kék, akkor pedig egy kék háromszög. 5 pontra van ellenpélda, ezért a megfelelő Ramsey-szám $R(3;3)=6$.

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy hat tetszőleges irracionális szám között mindig van három olyan, melyek közül bármely kettőnek az összege irracionális!

Megoldás: Legyenek a csúcsok a számok. Köztük fusson piros él, ha az összeg racionális, és kék, ha irracionális. Ha belátjuk, hogy nincs piros háromszög, akkor igazoltuk, hogy van kék.
Indirekt bizonyítjuk, hogy nincs piros háromszög. Tegyük fel, hogy van piros háromszög, melynek csúcsai az *x*, *y*, *z* irracionális számok. Ekkor $x+y$, $y+z$ és $z+x$ mindegyike racionális, ezért aztán $(x+y)+(y+z)-(z+x)=2y$ is racionális. De ekkor *y* is racionális lenne, ami ellentmondás.

Feladat: Adott a síkon 6 általános helyzetű pont (semelyik három nincs egy egyenesen). Tudjuk még azt is, hogy a pontpárok közti távolságok páronként különbözőek. Tekintsük az összes háromszöget, amit a pontok meghatároznak, és az egyes háromszögek leghosszabb oldalára írjunk egy *h* betűt, a legrövidebbre pedig egy *r* betűt. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan szakasz, amelyre *h* és *r* betűt is írtunk!

Megoldás: Legyen piros egy él, ha h betűt írtunk rá, különben kék. Minden háromszögnek van leghosszabb oldala, így nincs kék háromszög. Ezért van piros, vagyis olyan, amelynek minden oldalára h betű került. De ennek is van legrövidebb oldala, amire így r betű is került.

Feladat: Egy tíz fős társaságban bármelyik három ember között van két olyan, akik ismerik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a társaságban van négy olyan ember, akik közül bármelyik kettő ismeri egymást! Mi a helyzet 9 fős társaság esetén? És 8 fős társaság esetén?

Megoldás: A kérdés az $R(4;3)$ értéke: ha nincs kék háromszög, akkor hány pontnál igaz, hogy van piros teljes négyes klikk? (Vagyis 4 csúcsú teljes részgráf.) 10 pont esetén vizsgáljunk két esetet. Ha van olyan csúcs, amelyikből minimum 4 kék él indul, akkor ezek végpontjai között csak piros él futhat, ami egy teljes négyes. Ha nincs ilyen pont, akkor minden csúcsból max. 3 kék él indul, vagyis min. 6 piros él indul. Tekintsük a végpontjaikat. Az előző feladat miatt ebben van egyszínű háromszög. Mivel ez nem kék, így piros. Ez a kiválasztott ponttal egy piros négyes. Ha 9 pont van, akkor a bizonyítás első fele nem változik. A másodikban azt kapjuk, hogy mindenhonnan min. 5 piros indul. De nem indulhat mindenhonnan pontosan 5, mert páratlan sok csúcs van. Van, amelyikből min. 6 indul, így befejezhető a bizonyítás. 8-ra van ellenpélda, pl. nyolcszög elrendezésben minden csúcsból mutasson kék él a két szomszédhoz és a szemköztihez. $R(4;3)=9$.

Hetedik alapfeladat: Bizonyítsuk be, hogy öt általános helyzetű pont közül mindig ki lehet választani négyet úgy, hogy azok egy konvex négyszög csúcsai legyenek!

Megoldás: Talán ezzel érdemes megtanítani a konvex burkot, mint eszközt arra, hogy a pontelhelyezkedéseket osztályozzuk. Ha a konvex burok ötszög, akkor húzzuk be bármely átlót. Ebben az esetben 5 megoldás adódik. Ha a burok négyszög, akkor jó maga a burok, de van még további 2 megoldás. Ha a burok háromszög, akkor csak egy megoldás van. A két belső ponton átmenő egyenes egyik oldalán 2 pont van, ezek a 2 belső ponttal konvex négyszöget alkotnak. Megjegyzés: az általános helyzetű pontok kifejezés azt jelenti, hogy semelyik három pont nem illeszkedik egy egyenesre.

Feladat: Adott a síkon 100 általános helyzetű pont. Bizonyítsuk be, hogy lehet rajzolni 20 olyan konvex négyszöget, amelyeknek a csúcsai az adott pontok közül valók, és semelyik kettőnek nincs közös pontja (diszjunktak)!

Megoldás: Ehhez még egy eszköz kell, a söprő egyenes. Minden pontot minden ponttal összekötünk, majd felveszünk egy olyan egyenest, amely ezek egyikével sem párhuzamos. Ilyen nyilván van, meg végtelen sok irány van és csak véges sok összekötő egyenes. Ezzel végigsöpörve a síkot 5-ösével leválogathatjuk a pontokat, és minden pontötös ad egy konvex négyszöget.

Feladat: Adott a síkon 22 általános helyzetű pont. Bizonyítsuk be, hogy a pontokat párosával össze lehet kötni 11 egyenes szakasszal úgy, hogy ezeknek a szakaszoknak legalább 5 különböző metszéspontja legyen!

Megoldás: A Kürschák-versenyen 1971-ben ez volt a 2. feladat. Válasszunk le söprő egyenessel 5 pontot, ez meghatároz egy konvex négyszöget, aminek az átlói adnak egy metszéspontot. Sőt, maradt 1 pontunk. Ezt követően minden lépésben elég 4 pontot leválasztanunk, mert a maradékkal megvan az öt, így adódik mindig egy újabb metszéspont és mindig marad 1 pontunk.

Feladat: Adott a síkon n általános helyzetű pont $(n \geq 5)$. Bizonyítsuk be, hogy az általuk meghatározott pontnégyeseknek legalább a 20%-a konvex négyszöget határoz meg!

Megoldás: Minden pontötös meghatároz legalább egy konvex négyszöget. Ez legalább $\binom{n}{5}$ konvex négyszög, de mindegyiket $n-4$-szer számoltuk, vagyis a konvex négyszögek száma legalább $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$, amit átalakítva $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$. *(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1969.)*