

53. Rátz László Vándorgyűlés

Békéscsaba, 2013. július 2-5.

Néhány „jól ismert” összefüggésről

Győry Ákos

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

Amikor elvégeztem az egyetemet, naiv módon azt gondoltam, hogy sokmindent tudok a középiskolai matematikából, ám eddigi tanári pályafutásom alatt gyakran találtam szembe magam olyan versenyfeladatokkal, amelyek megoldása egy-egy olyan összefüggésre hivatkozott, amiről addig nem hallottam. Ilyen volt például a következő KöMaL-feladat (A. 405).

Az a, b, c, x, y, z valós számokra teljesül, hogy $a \geq b \geq c > 0$ és $x \geq y \geq z > 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by + cz)(bz + cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz + ax)(cx + az)} + \frac{c^2z^2}{(ax + by)(ay + bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ennek a megoldása mindjárt egy általam nem ismert, egyébként - mások által - jól ismert összefüggésre hivatkozott, a Nesbitt-egyenlőtlenségre. Aztán a megoldás a rendezési tétellel folytatódott, amit szintén nem ismertem korábbról. Foglalkozzunk először ezzel a két összefüggéssel.

A *Nesbitt-egyenlőtlenség* a következőt takarja: tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

s egyenlőség pontosan az $a = b = c$ esetben áll fenn.

Ennek az egyik *bizonyítása* a számtani és harmonikus közepek közti reláción alapul (ezentúl a harmonikus, mértani és számtani közepek közötti összefüggésre röviden $H \leq G \leq A$ -val fogunk hivatkozni). Induljunk ki a felírt

formulából, s ekvivalens lépésekkel alakítsuk át a következők szerint:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3 \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & ((a+b) + (b+c) + (c+a)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{(a+b) + (b+c) + (c+a)}{3} \geq \frac{1}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}},
\end{aligned}$$

ami $A \geq H$ miatt igaz. „ \Rightarrow ” $\Leftrightarrow a+b = b+c = c+a \Leftrightarrow a = b = c$. ■

Jelen dolgozatban mind a bizonyítások, mind pedig a feladatok megoldásainak a végét a „■” szimbólummal fogjuk jelölni.

A *rendezési tételt* legegyszerűbben a következőképpen tudjuk megfogalmazni: tekintsük az $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ és a $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ valós számokat, és legyen σ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja. Ekkor érvényes az alábbi összefüggés:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i+1},$$

s egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha teljesül, hogy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ vagy $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenséget látjuk be először. n szerinti teljes indukcióval okoskodunk. Ha $n = 1$, akkor az állítás automatikusan teljesül, nincs mit bizonyítani. Tegyük fel ezek után, hogy teljesül tetszőleges k pozitív egész számra, azaz

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k \geq a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_k b_{\sigma(k)}.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} \geq a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \dots + a_k b_{\sigma(k)} + a_{k+1} b_{\sigma(k+1)}.$$

Legyen m az a pozitív egész szám, melyre $\sigma(m) = k+1$. Ekkor mivel egyrészt $a_{k+1} \geq a_m$, másrészt $b_{k+1} \geq b_{\sigma(k+1)}$, így

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a_{k+1} - a_m)(b_{k+1} - b_{\sigma(k+1)}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_m b_{k+1} + a_{k+1} b_{\sigma(k+1)} \leq a_m b_{\sigma(k+1)} + a_{k+1} b_{k+1}. \end{aligned}$$

Ezáltal:

$$\begin{aligned} &a_1 b_{\sigma(1)} + \dots + a_m b_{\sigma(m)} + \dots + a_{k+1} b_{\sigma(k+1)} = \\ &= a_1 b_{\sigma(1)} + \dots + a_m b_{k+1} + \dots + a_{k+1} b_{\sigma(k+1)} \leq \\ &\leq a_1 b_{\sigma(1)} + \dots + a_m b_{\sigma(k+1)} + \dots + a_{k+1} b_{k+1}, \end{aligned}$$

ahonnan az indukciós feltétel miatt adódik az állítás.

A másik egyenlőtlenséget az első segítségével bizonyítjuk. Ehhez vegyük alapul az $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ és a $-b_n \leq -b_{n-1} \leq \dots \leq -b_1$ valós számokat, és alkalmazzuk rájuk az imént belátott egyenlőtlenséget:

$$a_1(-b_n) + a_2(-b_{n-1}) + \dots + a_n(-b_1) \geq a_1(-b_{\sigma(1)}) + a_2(-b_{\sigma(2)}) + \dots + a_n(-b_{\sigma(n)}),$$

amit átrendezve a kívánt összefüggéshez jutunk.

Az egyenlőség feltétele kiolvasható a bizonyítás menetéből. ■

Van olyan forrás, amely a tételt Gyires Bélának és Szűcs Adolfnak tulajdonítja, de van olyan is, mely pusztán Szűcs Adolf tételeként említi. Ábrahám Gábor Nevezetes egyenlőtlenségek című könyvében sok szép egyenlőtlenség között a rendezési tétel is megtalálható, s kapunk rá több alkalmazást is.

Nézzünk rá mi is két feladatot, melyek közül az elsőt 2011-ben a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen tűzték ki (10. osztály, 1. feladat, Kántor Sándorné feladata).

1. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c egy háromszög három oldala, akkor

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} < 4.$$

Megoldás. Nézzük először az első egyenlőtlenséget:

$$3 \leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Ezt ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozhatjuk:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

ami rögtön adódik, ha a rendezési tételt alkalmazzuk az (a, b, c) és az (a, b, c) számhármasokra (másképp okoskodva: 2-vel szorozva az egyenlőtlenséget, majd teljes négyzeteket kialakítva a következő alakot kapjuk:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0,$$

amivel szintén bebizonyítottuk az állítást). „=” $\Leftrightarrow a = b = c$.

A második egyenlőtlenség ekvivalens lépéseket végezve az alábbi formába önthető:

$$a^2 + b^2 + c^2 < a(b + c) + b(c + a) + c(a + b),$$

ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt teljesül. ■

Láthatjuk, hogy az első egyenlőtlenség általános érvényű, nem használtuk fel ugyanis a bizonyításában, hogy háromszög oldalairól van szó. A későbbiekben többször is alkalmazni fogjuk ezt az összefüggést, (*)-gal hivatkozunk majd rá:

$$3 \leq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}. \quad (*)$$

2. feladat. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c.$$

(Cristinel Mortici, Gazeta Matematica)

Megoldás. Világos, hogy az (a^2, b^2, c^2) és az $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ számhármasok azonosan rendezettek, ami alatt értjük azt, hogy mindkettőben pontosan ugyanaz a nagyságrendi viszony a megfelelő tagok között. Így a rendezési tétel értelmében:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c}.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\left(\frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b}\right)$ -t:

$$\frac{a^2 + bc}{b+c} + \frac{b^2 + ca}{c+a} + \frac{c^2 + ab}{a+b} \geq \frac{a^2 + ca}{c+a} + \frac{b^2 + ab}{a+b} + \frac{c^2 + bc}{b+c}.$$

Mivel a jobb oldalon egyszerűsítés után $a + b + c$ jelenik meg, így állításunkat be is láttuk. Az is világos, hogy „ $=$ ” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

A Nesbitt-egyenlőtlenség a rendezési tétel segítségével is könnyen igazolható, ugyanis az közös nevezőre hozás és pár ekvivalens lépés után a következő alakot ölti:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

Ez pedig igaz, hiszen ha a rendezési tételt alkalmazzuk az (a^2, b^2, c^2) , illetve az (a, b, c) hármassokra, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &\geq a^2b + b^2c + c^2a, \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq a^2c + b^2a + c^2b, \end{aligned}$$

amiket már csak össze kell adnunk, és készen is vagyunk. Innen az is adódik persze, hogy „ $=$ ” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

Megjegyezzük, hogy a Nesbitt-egyenlőtlenséget más úton is bizonyíthatjuk a rendezési tétel segítségével. Akit érdekel ez a bizonyítás és a Nesbitt-egyenlőtlenség több más szép bizonyítása, akkor az utánanézhethet ezeknek Róka Sándor 2006-ban a nagykanizsai továbbképzésen elhangzott előadásának kivonatában, amely a Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány gondozásában jelent meg (a kiadvány címe: Általános és középiskolai matematikai tehetséggondozás (2006. október 4-7.), az előadás címe: Bizonyítások a Nesbitt-egyenlőtlenségre).

Ezen előkészületek után a szemináriumot motiváló feladat megoldása már nem is olyan bonyolult.

3. feladat. Az a, b, c, x, y, z valós számokra teljesül, hogy $a \geq b \geq c > 0$ és $x \geq y \geq z > 0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^2x^2}{(by + cz)(bz + cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz + ax)(cx + az)} + \frac{c^2z^2}{(ax + by)(ay + bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

Megoldás. A rendezési tétel segítségével először is végezzünk becslést a nevezőkre vonatkozóan (a változók között fennálló nagyságrendi viszony egyébként sugallja a rendezési tétel használatát):

$$\begin{aligned} bz + cy \leq by + cz &\Rightarrow (by + cz)(bz + cy) \leq (by + cz)^2, \\ cx + az \leq cz + ax &\Rightarrow (cz + ax)(cx + az) \leq (cz + ax)^2, \\ ay + bx \leq ax + by &\Rightarrow (ax + by)(ay + bx) \leq (ax + by)^2. \end{aligned}$$

(„=” $\Leftrightarrow a = b = c$ vagy $x = y = z$). Így az egyenlőtlenség bal oldala (innenől kezdve minden feladatban röviden: BO) alulról becsülhető:

$$BO \geq \frac{a^2x^2}{(by + cz)^2} + \frac{b^2y^2}{(cz + ax)^2} + \frac{c^2z^2}{(ax + by)^2}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} 0 \leq (by - cz)^2 &\Leftrightarrow (by + cz)^2 \leq 2(b^2y^2 + c^2z^2), \\ 0 \leq (cz - ax)^2 &\Leftrightarrow (cz + ax)^2 \leq 2(c^2z^2 + a^2x^2), \\ 0 \leq (ax - by)^2 &\Leftrightarrow (ax + by)^2 \leq 2(a^2x^2 + b^2y^2), \end{aligned}$$

így a becslés tovább folytatható:

$$BO \geq \frac{a^2x^2}{2(b^2y^2 + c^2z^2)} + \frac{b^2y^2}{2(c^2z^2 + a^2x^2)} + \frac{c^2z^2}{2(a^2x^2 + b^2y^2)}.$$

Elegendő tehát azt belátnunk, hogy

$$\frac{a^2x^2}{2(b^2y^2 + c^2z^2)} + \frac{b^2y^2}{2(c^2z^2 + a^2x^2)} + \frac{c^2z^2}{2(a^2x^2 + b^2y^2)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ez pedig a Nesbitt-egyenlőtlenségből közvetlenül adódik, s így készen is vagyunk. ■

Aztán ahogy egyre több feladatot láttam, gyűltek a (mások által már) „jól ismert” összefüggések. Ilyen volt az úgynevezett *Titu-lemma*, amiről Kiss Géza tartott előadást 2010-ben Komáromban a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozón. A lemma Titu Andreescu nevéhez kötődik (az amerikai olimpiai csapat felkészítője), de több szakirodalom Bergström-egyenlőtlenségként említi, hiszen Bergström 1949-ben az összefüggést már publikálta (Harald Bergström, svéd matematikus). Mivel hazánkban a Titu-lemma elnevezés honosodott meg, így én is így fogom említeni, és a levezetésekben használni fogom a külföldi szakirodalom rá használatos rövidítését: T_2 (ejtsd: titu).

A Titu-lemma legegyszerűbb alakja a következő:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b},$$

ahol $a, b > 0$; $x, y \in \mathbb{R}$, és „=” $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Általánosan:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \quad (T_2)$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$; $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, és „=” $\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$.

Ugyan az állítás közvetlenül adódik a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenségből, mégis kiemelt fontosságúnak gondolom, hiszen sok feladatban annál sokkal könnyebb a használata. Nézzük meg a *bizonyítást* most másképp, teljes indukcióval:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow (xb - ya)^2 \geq 0,$$

és „=” $\Leftrightarrow xb = ya \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, vagyis teljesül az állítás.

Tegyük fel ezek után, hogy érvényes az egyenlőtlenség, ha annak bal oldalán k darab tört szerepel, azaz:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_k},$$

és „=” $\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_k}{a_k}$. Mutassuk meg ezek után $(k+1)$ -re:

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} &\geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} + \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}} \geq \\ &\geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1})^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}; \end{aligned}$$

az első egyenlőtlenségnél az indukciós lépést, a másodikban pedig az $n = 2$ esetet használtuk fel.

$$\text{„=”} \Leftrightarrow \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_k}{a_k} \quad \text{és} \quad \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} = \frac{x_{k+1}}{a_{k+1}},$$

s így

$$\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} = \frac{x_1 + x_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} + \dots + x_1 \cdot \frac{a_k}{a_1}}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} = \frac{x_1}{a_1},$$

amivel az állítást beláttuk. ■

A Titu-lemma segítségével a Nesbitt-egyenlőtlenség pillanatok alatt belátható:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+a)} + \frac{c^2}{c(a+b)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{3}{2},$$

„=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

Ezek után a Titu-lemma alkalmazásai következnek. Először is nézzük meg a Nesbitt-egyenlőtlenség pár lehetséges általánosítását a lemmával bizonyítva azokat.

4. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c, d, e pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}.$$

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a(b+c)} + \frac{b^2}{b(c+d)} + \frac{c^2}{c(d+e)} + \frac{d^2}{d(e+a)} + \frac{e^2}{e(a+b)} \stackrel{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb}, \end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ce+de+da+ea+eb} \geq \frac{5}{2}.$$

Ez pedig igaz, hiszen ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} &(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 + (b-c)^2 + \\ &+(b-d)^2 + (b-e)^2 + (c-d)^2 + (c-e)^2 + (d-e)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

„=” $\Leftrightarrow a = b = c = d = e$. ■

Harold S. Shapiro 1954-ben vetette fel, hogy igaz-e teljes általánosságban az előző állítás, azaz hogy vajon érvényes-e tetszőleges a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valós számokra az alábbi összefüggés:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2}.$$

A kérdés nagyon nehéz problémának minősült, és a válasz elég meglepő volt. Az egyenlőtlenség páros n -re csak 12-ig, páratlanra 23-ig igaz. Ha ellenben gyengítünk rajta, és a jobb oldalra $\frac{n}{3}$ -at írunk, akkor már teljesül minden pozitív egész n -re.

Az alábbi módon is általánosíthatjuk a Nesbitt-egyenlőtlenséget:

5. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c, x, y pozitív valós számokra érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{xb+yc} + \frac{b}{xc+ya} + \frac{c}{xa+yb} \geq \frac{3}{x+y}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 BO &= \frac{a^2}{a(xb + yc)} + \frac{b^2}{b(xc + ya)} + \frac{c^2}{c(xa + yb)} \stackrel{T_2}{\geq} \\
 &\geq \frac{(a + b + c)^2}{abx + acy + bcx + bay + cax + cby} = \frac{(a + b + c)^2}{(x + y)(ab + bc + ca)} \stackrel{(*)}{\geq} \\
 &\geq \frac{3}{x + y},
 \end{aligned}$$

és ahogy azt már láttuk, „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

Kézenfekvő a következő általánosítás is:

6. feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a_1, a_2, \dots, a_n pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n - 1},$$

ahol $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($n \geq 2$).

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}
 BO &= \frac{a_1^2}{a_1(S - a_1)} + \frac{a_2^2}{a_2(S - a_2)} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n(S - a_n)} \stackrel{T_2}{\geq} \\
 &\geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1S - a_1^2 + a_2S - a_2^2 + \dots + a_nS - a_n^2} = \\
 &= \frac{S^2}{S(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} = \\
 &= \frac{S^2}{S^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)},
 \end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{S^2}{S^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

Ez pedig átalakítások után ekvivalens azzal, hogy

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

Ennek igazolása a Titu-lemmával könnyen megy:

$$\frac{S^2}{n} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{1 + 1 + \dots + 1} \stackrel{T_2}{\leq} \frac{a_1^2}{1} + \frac{a_2^2}{1} + \dots + \frac{a_n^2}{1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Az is azonnal adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ■

A következő feladatok zömét idegen nyelven leltem fel az interneten. Hogy ezek a példák eredetileg kitől, honnan származnak, az internetes források alapján adtam meg, amiket a dolgozat végén fel is sorolok.

7. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll, hogy $a + b + c + d = 1$, akkor teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(ír versenyfeladat, 1999)

Megoldás.

$$BO \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c+d)^2}{2(a+b+c+d)} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{2}.$$

„=” $\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{c+d} = \frac{d}{d+a}$, ahonnan rövid számolás után adódik, hogy $a = b = c = d \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{4}$. ■

8. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Megoldás.

$$BO = \frac{2^2}{2(a+b)} + \frac{2^2}{2(b+c)} + \frac{2^2}{2(c+a)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(2+2+2)^2}{4(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.$$

„=” $\Leftrightarrow \frac{2}{2(a+b)} = \frac{2}{2(b+c)} = \frac{2}{2(c+a)} \Leftrightarrow a = b = c$. ■

9. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra érvényes a következő összefüggés:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{c+a} \stackrel{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(2(a+b+c))^2}{4(a+b+c)} = a+b+c. \end{aligned}$$

Gyorsan adódik az is, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

10. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az a_1, a_2, \dots, a_n és a b_1, b_2, \dots, b_n pozitív valós számok teljesítik az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

feltételt, akkor az is igaz rájuk, hogy

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}.$$

(Romeo Ilie)

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_1^2}{a_1 b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n b_n} \stackrel{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n} \stackrel{\text{feltétel}}{\geq} \\ &\geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \\ &= a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

11. feladat. Mutassuk meg, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $a + b + c = 1$, akkor:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

(indiai versenyfeladat)

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a(1+bc)} + \frac{b^2}{b(1+ca)} + \frac{c^2}{c(1+ab)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \\ &= \frac{1}{1+3abc} \stackrel{A \geq G}{\geq} \frac{1}{1+3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{1+3 \cdot \frac{1}{27}} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Közvetlenül adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{3}$. ■

12. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számokra igaz a következő összefüggés:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

(cseh-szlovák versenyfeladat, 1999)

1. megoldás.

$$BO = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \stackrel{(*)}{\geq} 1.$$

Az is világos, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

2. megoldás. Közvetlenül adódik az 5. feladat eredményéből. ■

13. feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden a, b, c pozitív valós szám esetén érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Megoldás. Mivel

$$BO \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)},$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ez pedig teljesül, mivel néhány ekvivalens lépésben a már bebizonyított $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ összefüggésre hozható. Ebből az is adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

A következő feladatot Mészáros Józseftől hallottam a korábban említett 2010-es Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozón, s nagyon jó rávezető példa az 1995-ös Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) 2-es feladatára, amit utána meg is nézünk.

14. feladat. Tegyük fel, hogy az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $abc = 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor érvényes a

$$\frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(c+a)} + \frac{2}{c^3(a+b)} \geq ab + bc + ca$$

egyenlőtlenség.

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= 2 \left(\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \right) \stackrel{T_2}{\geq} \\ &\geq 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{\left(\frac{ab+bc+ca}{abc} \right)^2}{ab+bc+ca} \stackrel{\text{feltétel}}{=} ab+bc+ca. \end{aligned}$$

„=” $\Leftrightarrow \frac{1}{a^2(b+c)} = \frac{1}{b^2(c+a)} = \frac{1}{c^2(a+b)}$. Itt például az első egyenlőségből az adódik, hogy $a^2b + a^2c = b^2c + b^2a$, amit átrendezve és szorzattá alakítva a következő formába önthetünk:

$$(a-b)(ab+c(a+b)) = 0.$$

Figyelembe véve, hogy minden változó pozitív a feltétel szerint, így ez pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Hasonlóan kapjuk, hogy $b = c$, azaz egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn a feladatban, ha $a = b = c \stackrel{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

15. feladat. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív valós a, b, c számokra teljesül az $abc = 1$ feltétel, akkor az is igaz rájuk, hogy:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(IMO, 1995, 2. feladat)

Megoldás. Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{ab+bc+ca}{2},$$

így elegendő belátnunk, hogy

$$ab + bc + ca \geq 3,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq 1.$$

Ez viszont igaz, hiszen

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \stackrel{A \geq G}{\geq} \sqrt[3]{(abc)^2} \stackrel{\text{feltétel}}{=} 1.$$

Az is közvetlenül adódik az előző feladatból, hogy „ $=$ ” $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. ■

A következő példa az egyenlőségvizsgálat fontosságára hívja fel a figyelmet.

16. feladat. Igazoljuk, hogy minden a, b pozitív valós számra teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{18}{(a+b)^4} \leq \frac{2}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^3b + b^3a}.$$

Megoldás. Könnyen ellenőrizhető módon:

$$(a+b)^4 = (a-b)^4 + 8(a^3b + b^3a).$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(a-b)^4} + \frac{1}{a^3b + b^3a} &= \frac{2}{(a-b)^4} + \frac{8}{8(a^3b + b^3a)} = \\ &= 2 \left(\frac{1^2}{(a-b)^4} + \frac{2^2}{8(a^3b + b^3a)} \right) \stackrel{T_2}{\geq} 2 \cdot \frac{(1+2)^2}{(a+b)^4} = \\ &= \frac{18}{(a+b)^4}. \end{aligned}$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)^4} &= \frac{2}{8(a^3b + b^3a)} \Leftrightarrow 8(a^3b + b^3a) = 2(a-b)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a+b)^4 - (a-b)^4 = 2(a-b)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a+b)^4 = 3(a-b)^4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |a+b| = \sqrt[4]{3} |a-b|. \end{aligned}$$

Ha ezt az egyenletet megoldjuk, akkor $a > b$ esetén azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{1 + \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3} - 1} b,$$

ha pedig $a < b$, akkor azt, hogy

$$a = \frac{\sqrt[4]{3} - 1}{\sqrt[4]{3} + 1} b.$$

Az $a = b$ eset eleve kizárt, így a feladat megoldásának végére értünk. ■

17. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $abc = 1$ feltételt teljesítő a, b, c pozitív valós számokra teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \geq 1.$$

(Vasile Cartoaje, Gazeta Matematica)

Megoldás. Bevezetve a $d := a + b + c + 1$ jelölést állításunk új alakja a következő lesz:

$$\frac{d - (b + c + 1)}{b + c + 1} + \frac{d - (c + a + 1)}{c + a + 1} + \frac{d - (a + b + 1)}{a + b + 1} \geq 1,$$

ami ekvivalens az alábbival:

$$\frac{d}{d-a} + \frac{d}{d-b} + \frac{d}{d-c} \geq 4.$$

Ennek belátása pedig a Titu-lemmával nem bonyolult feladat:

$$\begin{aligned} BO &= \frac{d^2}{d(d-a)} + \frac{d^2}{d(d-b)} + \frac{d^2}{d(d-c)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(3d)^2}{3d^2 - d(a+b+c)} = \\ &= \frac{(3d)^2}{3d^2 - d(d-1)} = \frac{9d^2}{2d^2 + d} = \frac{9d}{2d+1} \geq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d \geq 4 \Leftrightarrow a+b+c \geq 3 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq 1, \end{aligned}$$

ami igaz, hiszen

$$1 \stackrel{\text{feltétel}}{=} \sqrt[3]{abc} \stackrel{A \geq G}{\leq} \frac{a+b+c}{3}.$$

Az is világos, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c \stackrel{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

18. feladat. Vegyük alapul a, b, c pozitív valós számokat, melyek kielégítik az $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ feltételt. Mutassuk meg, hogy ekkor teljesül rájuk a következő összefüggés is:

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Megoldás. Hozzunk közös nevezőre a bal oldalon, majd alkalmazzuk a Titulemmát:

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^3}{a^2b^2c^2} + \frac{b^3}{a^2b^2c^2} + \frac{c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{a^4}{a(a^2b^2c^2)} + \frac{b^4}{b(a^2b^2c^2)} + \frac{c^4}{c(a^2b^2c^2)} \stackrel{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(abc)^2(a + b + c)} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{(3abc)^2}{(abc)^2(a + b + c)} = \frac{9}{a + b + c}. \end{aligned}$$

Továbbá „=” $\Leftrightarrow \frac{a^2}{a(a^2b^2c^2)} = \frac{b^2}{b(a^2b^2c^2)} = \frac{c^2}{c(a^2b^2c^2)} \Leftrightarrow a = b = c \stackrel{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

Az alábbi példa feladatjavaslat volt az 1993-as Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára, végül nem tűzték ki.

19. feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c} \geq \frac{2}{3}.$$

(Titu Andreescu, IMO, 1993, Shortlist)

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned} BO &= \\ &= \frac{a^2}{a(b + 2c + 3d)} + \frac{b^2}{b(c + 2d + 3a)} + \frac{c^2}{c(d + 2a + 3b)} + \frac{d^2}{d(a + 2b + 3c)} \stackrel{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a + b + c + d)^2}{4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)}, \end{aligned}$$

így elegendő megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a + b + c + d)^2}{4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)} \geq \frac{2}{3}.$$

Mivel ez pár lépéses rendezés után ekvivalens azzal, hogy

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \geq 0,$$

így az állítást beláttuk. Az is látható, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c = d$. ■

A következő két feladatban egy „jól ismert” polinom tűnik fel, nevezetesen az $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ polinom. Ennek egy igen lényeges tulajdonsága, hogy faktorizálható az alábbi módon, amit a megoldásokban erősen felhasználunk:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy Pelikán József múlt tanévi (2012-2013) olimpiai szakkörén (ami fellelhető az egyik legnépszerűbb videómegosztón az interneten) kiemelten foglalkozott ezzel a polinommal, s megmutatta, hogy minden 3-nál nagyobb prímszám lényegében egyértelműen előállítható ilyen alakban.

20. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c pozitív valós számok teljesítik az $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$ feltételt, akkor érvényes rájuk az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{a^2 - bc + 1} + \frac{b}{b^2 - ca + 1} + \frac{c}{c^2 - ab + 1} \geq \frac{1}{a + b + c}.$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} BO &= \frac{a^2}{a(a^2 - bc + 1)} + \frac{b^2}{b(b^2 - ca + 1)} + \frac{c^2}{c(c^2 - ab + 1)} \stackrel{T_2}{\geq} \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + (a + b + c)} = \\ &= \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + (a + b + c)} = \\ &= \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 1} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \\ &= \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 3(ab + bc + ca)} = \\ &= \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = \frac{a + b + c}{(a + b + c)^2} = \\ &= \frac{1}{a + b + c}. \end{aligned}$$

„=” $\Leftrightarrow \frac{a}{a(a^2 - bc + 1)} = \frac{b}{b(b^2 - ca + 1)} = \frac{c}{c(c^2 - ab + 1)}$. Ha tekintjük például az első egyenlőséget, akkor abból az adódik, hogy $a^2 - bc + 1 = b^2 - ca + 1$, amit átrendezve és szorzattá alakítva az $(a - b)(a + b + c) = 0$ alakra hozhatunk. Tekintettel arra, hogy a feltétel értelmében minden változó pozitív, ez pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $b = c$, azaz az egyenlőség pontosan akkor áll fenn a feladatban, ha $a = b = c \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{1}{3}$. ■

21. feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c pozitív valós számra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

(Tournament of the Towns, 1998)

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}
 BO &= \frac{a^4}{a(a^2 + ab + b^2)} + \frac{b^4}{b(b^2 + bc + c^2)} + \frac{c^4}{c(c^2 + ca + a^2)} \stackrel{T_2}{\geq} \\
 &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)} = \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + (a+b+c)(ab+bc+ca)} = \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c},
 \end{aligned}$$

így elegendő azt belátnunk, hogy

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Ez viszont igaz, hiszen pár ekvivalens lépés után az $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ alakot kapjuk belőle, amit már beláttunk, s azt is, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c$. ■

A következő két feladat szintén Mészáros József előadásán hangzott el.

22. feladat. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy $ab + bc + ca = 3$, akkor érvényes rájuk az alábbi összefüggés is:

$$\frac{a}{b(r+c)} + \frac{b}{c(r+a)} + \frac{c}{a(r+b)} \geq \frac{3}{r+1},$$

ahol r tetszőleges pozitív valós szám.

Megoldás. Először is

$$\begin{aligned}
 BO &= \frac{a^2}{ab(r+c)} + \frac{b^2}{bc(r+a)} + \frac{c^2}{ca(r+b)} \stackrel{T_2}{\geq} \frac{(a+b+c)^2}{r(ab+bc+ca) + 3abc} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 6}{3r + 3abc} \stackrel{\text{rendezési tétel}}{\geq} \frac{ab + bc + ca + 6}{3r + 3abc} \stackrel{\text{feltétel}}{=} \frac{9}{3r + 3abc} = \\
 &= \frac{3}{r + abc}.
 \end{aligned}$$

Másrészt a feltétel értelmében

$$1 = \frac{ab + bc + ca}{3} \stackrel{A \geq G}{\geq} \sqrt[3]{(abc)^2},$$

így

$$BO \geq \frac{3}{r+1},$$

amit éppen állítottunk.

Közvetlenül adódik a korábbiakból, hogy „=” $\Leftrightarrow a = b = c \stackrel{\text{feltétel}}{=} 1$. ■

Az alábbi feladat során használni fogjuk a Nesbitt-egyenlőtlenség egyik általánosítását (l. 5. feladat).

23. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > -1$ tetszőleges valós számok, akkor érvényes rájuk a következő összefüggés:

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2.$$

Megoldás. A feltétel garantálja, hogy mindhárom nevező pozitív legyen.

Végezzünk először is becslést a nevezőkre vonatkozóan:

$$(1-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1-2a+a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{1+a^2}{2},$$

s egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = 1$. Hasonlóan adódik, hogy $b \leq \frac{1+b^2}{2}$, illetve $c \leq \frac{1+c^2}{2}$ (és „=” $\Leftrightarrow b = c = 1$). Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$BO \geq \frac{1+a^2}{1+\frac{1+b^2}{2}+c^2} + \frac{1+b^2}{1+\frac{1+c^2}{2}+a^2} + \frac{1+c^2}{1+\frac{1+a^2}{2}+b^2},$$

ahol kis átalakítás után a három tört a következő alakban írható fel:

$$2 \left(\frac{1+a^2}{(1+b^2)+2(1+c^2)} + \frac{1+b^2}{(1+c^2)+2(1+a^2)} + \frac{1+c^2}{(1+a^2)+2(1+b^2)} \right).$$

Az 5. feladat értelmében a zárójeles kifejezés alulról becsülhető $\frac{3}{1+2} = 1$ -gyel, s ezzel készen is vagyunk. „=” $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. ■

A Titu-lemma alkalmazására nézzük meg végezetül a 2005-ös Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 3-as feladatát. A már említett interneten fellelhető olimpiai szakkörön erre a feladatra két megoldást is kapunk. Az egyik megoldás a „hivatalos” megoldás, a másik pedig a moldáv Iurie Boreico megoldása, ami mind a hivatalosnál, mind az alábbi megoldásnál szellemesebb

(különdíjat kapott érte, ez mindmáig az utolsó különdíj, amit kiosztottak).

24. feladat. Mutassuk meg, hogy minden x, y, z pozitív valós számra, melyekre teljesül, hogy $xyz \geq 1$, fennáll az alábbi összefüggés:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

(IMO, 2005, 3. feladat)

Megoldás. Mivel

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{(x^5 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)}{x^5 + y^2 + z^2} = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2}$$

(s hasonlóan a többi törtre is), kapjuk, hogy

$$BO = 3 - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \right).$$

Így a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens átfogalmazása a következő:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $(x^2 + y^2 + z^2)$ -tel:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^5} \leq 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ennek bizonyításához használjuk a Titu-lemmát:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^5 + y^2 + z^2} \stackrel{T_2}{\leq} \frac{(x^2)^2}{x^5} + \frac{(y^2)^2}{y^2} + \frac{(z^2)^2}{z^2} = \frac{1}{x} + y^2 + z^2.$$

Analóg módon kapjuk a másik két tört felső becslését:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^5 + z^2} &\leq x^2 + \frac{1}{y} + z^2, \\ \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^5} &\leq x^2 + y^2 + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Adjuk össze a három egyenlőtlenség megfelelő oldalait:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^5} &\leq \\ &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Elegendő tehát belátnunk, hogy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

Ez már gyorsan kijön:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} \leq x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & xy + yz + zx \leq xyz(x^2 + y^2 + z^2), \end{aligned}$$

ami igaz, hiszen a feltétel értelmében $xyz \geq 1$, a rendezési tétel miatt pedig - mint ahogy azt láttuk korábban - $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Az is azonnal adódik, hogy „=” $\Leftrightarrow xyz = 1$, ami a feltétel tekintetbe vételével azt jelenti, hogy $x = y = z = 1$. ■

Természetesen a Titu-lemmának létezik általánosabb formája is. Az viszont eléggé meglepő, hogy J. Radon (Johann Karl August Radon, osztrák matematikus) ezt egy 1913-as cikkében (*Über die absolut additiven Mengenfunktionen*, Wiener Sitzungsber **122** (1913), 1295 - 1438.) publikálta. Foglalkozunk most ezzel az eredménnyel.

Tetszőleges $p > 0$; $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ és $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ valós számok esetén teljesül az alábbi összefüggés:

$$\frac{x_1^{p+1}}{a_1^p} + \dots + \frac{x_n^{p+1}}{a_n^p} \geq \frac{(x_1 + \dots + x_n)^{p+1}}{(a_1 + \dots + a_n)^p}.$$

Világos, hogy innen $p = 1$ választással visszacapjuk a Titu-lemmát. Azóta természetesen ezt a tételt is finomították, általánosították, még az utóbbi években is publikáltak e témakörben.

Tekintsünk egy alkalmazást a Radon-tételre. A következő feladatot a 2001-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpián tűzték ki 2-es feladatként.

25. feladat. Igazoljuk, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

minden a, b, c pozitív valós számra.
(IMO, 2001, 2. feladat)

Megoldás. Írjuk át a bal oldalt, majd alkalmazzuk rá a Radon-tételt:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3 + 8abc}} + \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b^3 + 8abc}} + \frac{c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{c^3 + 8abc}} \geq \frac{(a + b + c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}}.$$

Elegendő tehát annyit megmutatnunk, hogy

$$\frac{(a + b + c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}} \geq 1,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Innen pár lépésben a következő alakot kapjuk:

$$a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \geq 6abc,$$

amit ha (abc) -vel osztunk, akkor az alábbi kapjuk:

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 6.$$

Így viszont készen is vagyunk, hiszen egy pozitív számnak és reciprokának az összege minimum 2. Ebből az alakból közvetlenül kiolvasható az is, hogy egyenlőség pontosan az $a = b = c$ esetben áll fenn. ■

Ennek a feladatnak a magyarul fellelhető megoldása (Reiman István - Dobos Sándor: Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-2003) ennél sokkal több furfangot igényel, hiszen nem használja a Radon-tételt.

Akkor vegyük át még egyszer. Titu-lemmának hívjuk azt az összefüggést, amit jóval korábban Bergström már leírt, s amit még korábban Radon általánosabb formában publikált...

Remélem, sikerült pár „jól ismert” összefüggést áttekintenünk, s volt köztük olyan is, amely azért az újdonság erejével hatott másnak is, nem csak számomra. Az érdeklődők számára ajánlom az alábbi internetes forrásokat, amiket nagyban felhasználtam a szemináriumra való készülés közben:

<https://ineqkhoinguyen.files.wordpress.com/2008/02/titu-and-harazi-bo-ich.pdf>

http://www.icstm.ro/DOCS/josa/josa_2008_1/a.10_GENERALIZATIONS_AND_REFINEMENTS_FOR_BERGSTROM_AND_RADONS_INEQUALITIES.pdf

<http://www.komal.hu/forum/forum.cgi?a=to&tid=32&st=25&sp=303>