Elemi problémák a kombinatorikus geometria témaköréből

Keszegh Balázs

A geometria a gimnáziumi matematika oktatás fontos része. Most egy olyan részét szeretném bemutatni, mely különbözik a gimnáziumban többnyire látott geometriai feladattípusoktól (pl. háromszögek szerkesztései, nevezetes pontjai stb.), viszont ennek ellenére egy olyan téma, mely nyugodtan szerepelhetne szakkörökön is, hiszen nincs szükség egyetemen tanult fogalmakra a feladatok megértéséhez és gyakran megoldásukhoz sem. Ehhez hasonló problémák láttán a diákok esetleg jobban megérthetik, hogy milyen feladatokon gondolkoznak a kutató matematikusok, és hogy ez valójában nem is mindig áll olyan távol attól, amikkel ők is foglalkoznak. Továbbá, ez egy olyan kérdéskör, melyet jellemzően a kombinatorikus geometria témakörébe sorolnak, így azt is mutatja, hogy a matematika különböző területei hogyan függhetnek össze (jelen esetben a geometria és a kombinatorika).

Ponthalmazok jó színezése különböző alakzat-típusokra vonatkozóan egy szerteágazó problémacsalád, mely sok más jelenleg aktív kutatási témával is szorosan összefügg (síkfedések szétszedése, konfliktus-mentes színezések, stb.). Ebbe a témába szeretnék egy kisebb betekintést nyújtani, néhány feladaton keresztül. Ezek egyrészt olyan nehézségűek, hogy gimnáziumi szakkörökön is előkerülhetnek, másrészt remélhetőleg jól illusztrálják, hogy eddig megoldatlan problémáknak is lehetnek szép elemi bizonyításai.

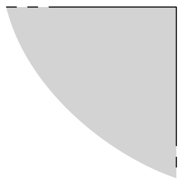
1. *Adott egy P ponthalmaz az egyenesen. Színezzük ki P pontjait két színnel úgy, hogy tetszőleges intervallum vagy legfeljebb egy P-beli pontot tartalmaz, vagy tartalmaz két különböző színű pontot!*

2. *Adott egy $2^n - 1$ elemű P ponthalmaz az egyenesen. Színezzük ki P pontjait minél kevesebb színnel úgy, hogy tetszőleges I intervallumban van olyan pont, melynek színe különbözik a többi I-beli pont színétől!*

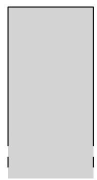
3. *Adott intervallumok egy I halmaza az egyenesen. Színezzük ki az intervallumokat két színnel úgy, hogy tetszőleges pont vagy legfeljebb egy I-beli intervallumban van benne, vagy az őt tartalmazó intervallumok közt van két különböző színű!*

4. *Adott intervallumok egy I halmaza az egyenesen. Színezzük ki az intervallumokat 3 színnel úgy, hogy tetszőleges p pontra a p-t tartalmazó intervallumok közt van egy, melynek színe eltér a többi p-t tartalmazó intervallum színétől!*

5. *Adott egy P ponthalmaz a síkon. Színezzük ki P pontjait 4 színnel úgy, hogy tetszőleges félsík vagy legfeljebb egy P-beli pontot tartalmaz, vagy tartalmaz két különböző színű pontot! Mutassunk példát, mikor szükség van 4 színre!*



ék



függőleges félcsík

6. *Adott egy P ponthalmaz a síkon. Színezzük ki P pontjait két színnel úgy, hogy tetszőleges félsík vagy legfeljebb 2 P-beli pontot tartalmaz, vagy tartalmaz két különböző színű pontot!*

Éknek nevezünk egy 90 fokos szögtartományt, melyet egy függőleges, lefelé végtelen félegyenes és egy vízszintes, balra végtelen félegyenes határol.

7. *Adott egy P ponthalmaz a síkon. Színezzük ki P pontjait két színnel úgy, hogy tetszőleges ék vagy legfeljebb egy P-beli pontot tartalmaz, vagy tartalmaz két különböző színű pontot!*

A félsíkok után mi sem természetesebb, mint a *félcsíkok* vizsgálata. Függőleges félcsíknak nevezünk egy alakzatot, melyet két függőleges, lefelé végtelen félegyenes határol a két oldalán és egy vízszintes szakasz a tetején.

8. *Adott egy P ponthalmaz a síkon. Színezzük ki P pontjait 3 színnel úgy, hogy tetszőleges függőleges félcsík vagy legfeljebb egy P-beli pontot tartalmaz, vagy tartalmaz két különböző színű pontot!*

9. * *Adott egy P ponthalmaz a síkon. Színezzük ki P pontjait két színnel úgy, hogy tetszőleges függőleges félcsík vagy legfeljebb 3 P-beli pontot tartalmaz, vagy tartalmaz két különböző színű pontot!*

10. *Mutassunk olyan P ponthalmazt a síkon, melyet bárhogy színezünk ki két színnel, mindig van olyan függőleges félcsík, mely 3 P-beli pontot tartalmaz és mindhárom pont ugyanolyan színű!*

11. * *Adott egy P ponthalmaz a síkon. Színezzük ki P pontjait 5 (4) színnel úgy, hogy tetszőleges körlap vagy legfeljebb egy P-beli pontot tartalmaz, vagy tartalmaz két különböző színű pontot! Mutassunk példát, mikor szükség van 4 színre!*

Geometriai előismeretek a 11. feladathoz:

12. *Adott egy P ponthalmaz a síkon. Kössünk össze egy szakasszal két P-beli pontot, ha van olyan körlap, ami éppen ezt a két pontot tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy így síkbarajzolt gráfot kapunk (azaz nincs metszés az összekötő szakaszok közt)! Megjegyzés: az így definiált síkbarajzolt gráfot a P pontok Delaunay-háromszögelésének nevezzük.*

13. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges síkbarajzolt gráf csúcsai 5 színnel színezhetőek úgy, hogy ne legyen két szomszédos csúcs, melyet ugyanolyan színűre színeztünk!*