

## Játék a négyzetszámokkal

Ebben a speciális számelméleti játékkaszinóban minden játék kipróbálható, összerakható és továbbfejleszthető, és nem lehet veszíteni. Jó szórakozást!

1. Előfordul-e, és ha igen, hányszor, hogy (a) 2; (b) 5; (c) 11; (d) 25 egymást követő négyzetszám összege is négyzetszám?
2. A számok hány százaléka áll elő két négyzetszám különbségeként? És hány százaléka áll elő három négyzetszám összegeként?
3. Hány egymást követő természetes szám adható meg, amelyek (a) mindegyike felírható; (b) egyike sem írható fel két négyzetszám összegeként?
4. Átlagosan hányféleképp áll elő egy szám két négyzetszám összegeként?
5. Lehet-e (a) 2; (b) 3; (c) 4 egymást követő pozitív egész szorzata négyzetszám?
6. Adjuk meg pozitív egészek olyan végtelen sorozatát, hogy semelyik két tag (a) összege; (b) különbsége se legyen négyzetszám. Próbáljunk minél sűrűbb ilyen sorozatokat konstruálni.
7. Van-e végtelen sok olyan háromtagú számtani sorozat, amelynek az elemei relatív prím négyzetszámok?
8. Mely számrendszerekben lesz az (a) 3; (b) 5; (c) 33 darab 1-esből álló szám négyzetszám?
9. Adott 11 (különböző) pozitív egész, amelyek egyikének sincs 30-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható néhány (lehet, hogy csak egy, lehet, hogy az összes), amelyek szorzata négyzetszám.
10. Milyen  $n$ -ekre igaz, hogy  $n$  darab alkalmas (nem feltétlenül egybevágó) négyzetből, mindegyiket felhasználva, hézagtalanul kirakható egy (nagyobb) négyzet? És mi a helyzet a térben, ha ugyanezt kockákra kérdezzük?