Gépet lehet használni?

Erben Péter

Rátz László Vándorgyűlés, Révkomárom,
2011. július 5-8.

Feladatmegoldás közben

$$\ldots$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

„Gépet lehet használni?"

Feladatmegoldás közben

…

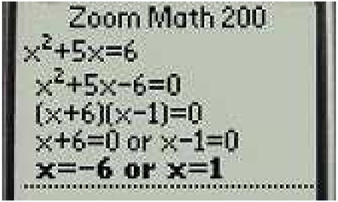
$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

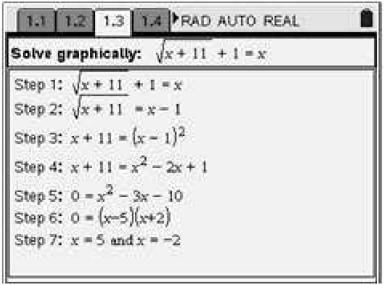
„Gépet lehet használni?”

Válaszok és víziók

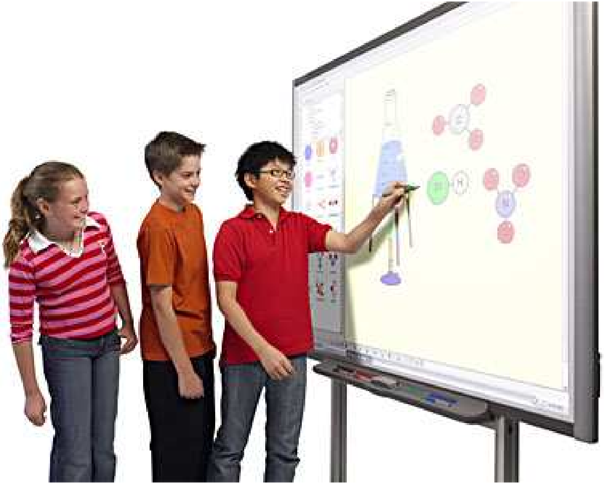
Számológépet mindenkinek!

(8+√(8^2+4×9))÷2





Bűvölj el!



Keress rá!

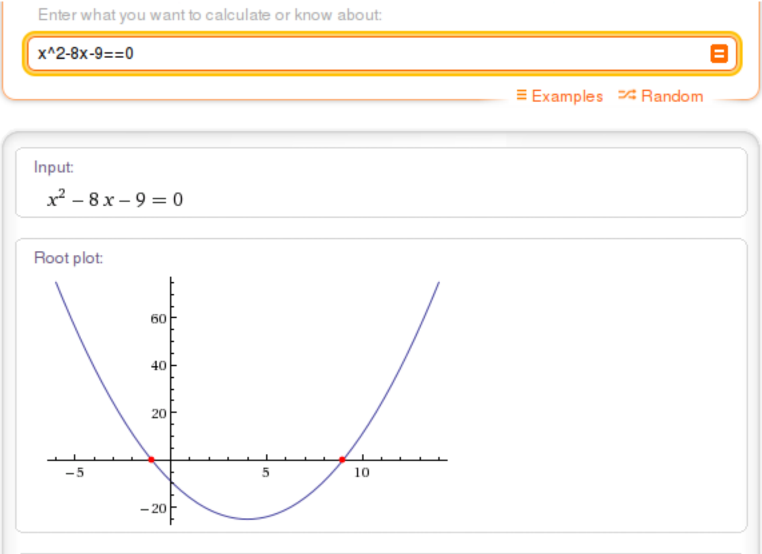
x^2-8x-9=0 Keresés

Nagyjából 14 800 találat (0,23 másodperc) Google.com in English Speciális keresés

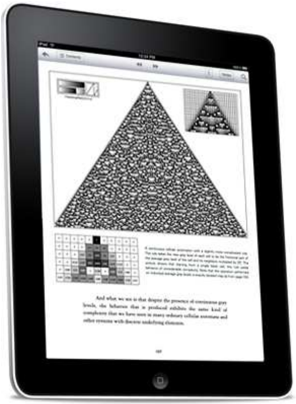
Maths question....solve x² - 8x - 9 = 0? - Yahoo! UK & Ireland Answers
- [Oldal lefordítása]
7 válasz - 2009. jún. 23.
(**x** - 9) (**x** + 1) **x** = 9 **x** = -1 : **x** times **x** = **x**^2 : **x** times 1 = **x** : -9 times **x** = -9x : -9 times 1 = -9
therefore: **x**^2 - 9x + **x** - 9 = 0 ..... **x^2- 8x - 9 = 0 ...**
uk.answers.yahoo.com/.../index?... - Egyesült Királyság - Tárolt változat - Hasonló

Answer a maths equation question? - 5 válasz
Solving quadratics questions? - 1 válasz
Algebraic fractions help? - 5 válasz
Solve the equation x^2 - 8x + 11 = 0 in a simplified surd form ... - 1 válasz
További találatok a(z) uk.answers.yahoo.com domainről »

Használd algoritmusainkat!



Stephen Wolfram



Mi a matematika?

Conrad Wolfram

1. A megfelelő kérdés megtalálása
2. A kérdés lefordítása a matematika nyelvére
3. A matematikai válasz kiszámítása
4. Az eredmény egybevetése a valósággal

Mit tanítsunk?

Conrad Wolfram

1. A megfelelő kérdés megtalálása
2. A kérdés lefordítása a matematika nyelvére
3. A matematikai válasz kiszámítása
4. Az eredmény egybevetése a valósággal

A gépeké a jövő?

- Kézzel *fárasztó* számolni
- A tanári előadás *unalmas*
- A „hagyományos" tanóra *ingerszegény*
- A *tekintélyelvű* információátadás kora leáldozott
- A mechanikus tevékenység helyett a *lényeggel* lehet foglalkozni

Hogyan olvasnak a fiatalok?

Fenyő D. György írása alapján

hagyományos	digitális
lineáris	szimultán
verbális	képi
globális	válogató
struktúra	egyedi elemek
szerzői szándék	olvasói élmény

Douglas Rushkoff

- Ne legyél mindig online!
- Ne légy anonim!
- Kell hogy legyen valami igazság abban, amit csinálsz.
- Programozz, vagy beprogramoznak!

Másodfokú egyenlet

```
BE(a,b,c)
Ha a = 0 vagy b*b < 4*a*c akkor
    hibaüzenet
különben
    D := b*b - 4*a*c
    x1 := (-b+sqrt(D))/(2*a)
    x2 := (-b-sqrt(D))/(2*a)
    KI(x1, x2)
Elágazás vége
```

Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

A T[1..n] tömb rendezése

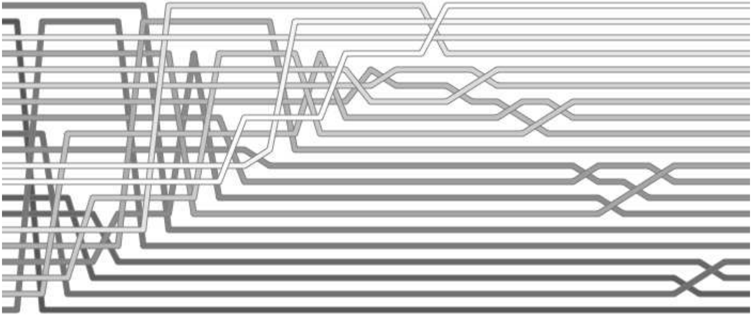
T[1]=5, T[2]=1, T[3]=2, T[4]=4, T[5]=3

Cél: az elemek növekvő rendezése

Művelet: két tetszőleges elem cseréje

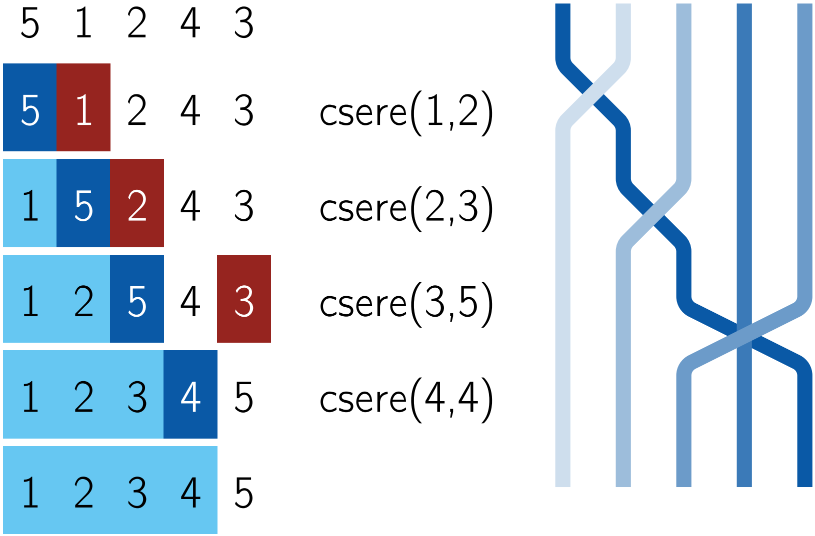
5 1 2 4 3

1 5 2 4 3



Minimumkiválasztásos rendezés

```
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    min := i
    Ciklus j := i+1,...,n
        Ha T[j] < T[min] akkor
            min := j
    Ciklus vége
    Csere(i,min)
Ciklus vége
```


5 1 2 4 3
5 1 2 4 3
csere(1,2)
1 5 2 4 3
csere(2,3)
1 2 5 4 3
csere(3,5)
1 2 3 4 5
csere(4,4)
1 2 3 4 5

Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

$$\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- k. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

$$\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- k. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

$$\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- k. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

Keverés

Kártyák keverése = véletlen permutáció 

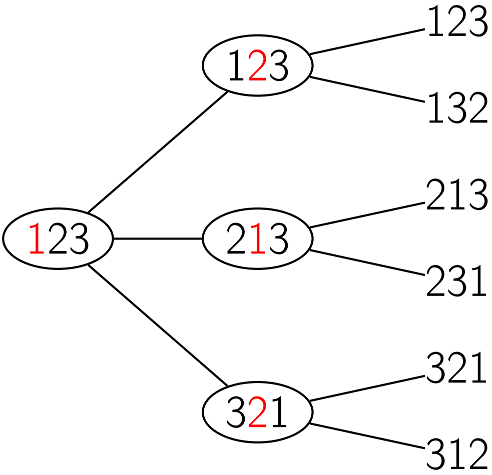
$$\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$$

- összes permutáció előállítása ($n!$)
- k. permutáció közvetlen előállítása
- rendezettből kevert

Véletlen permutáció

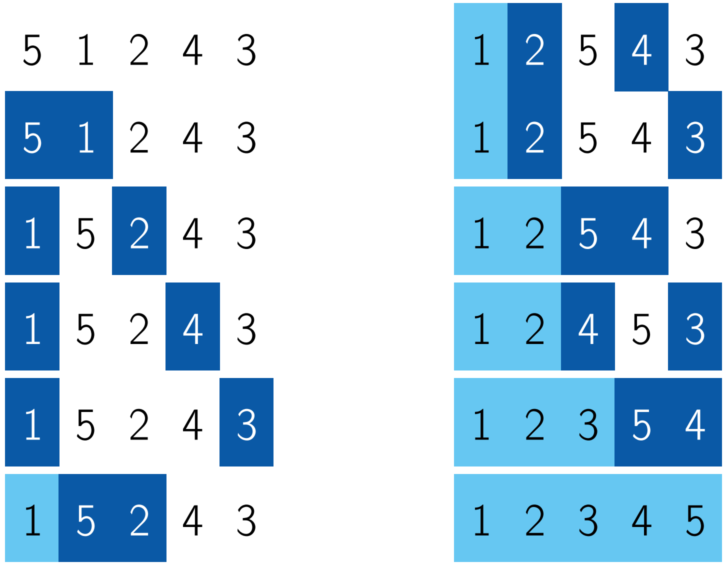
```
minden i-re T[i] := i
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    j := Véletlen(i,n)
    Csere(i,j)
Ciklus vége
```

- Minden permutáció létrejön
- Egy permutáció $1/n!$ valószínűséggel áll elő



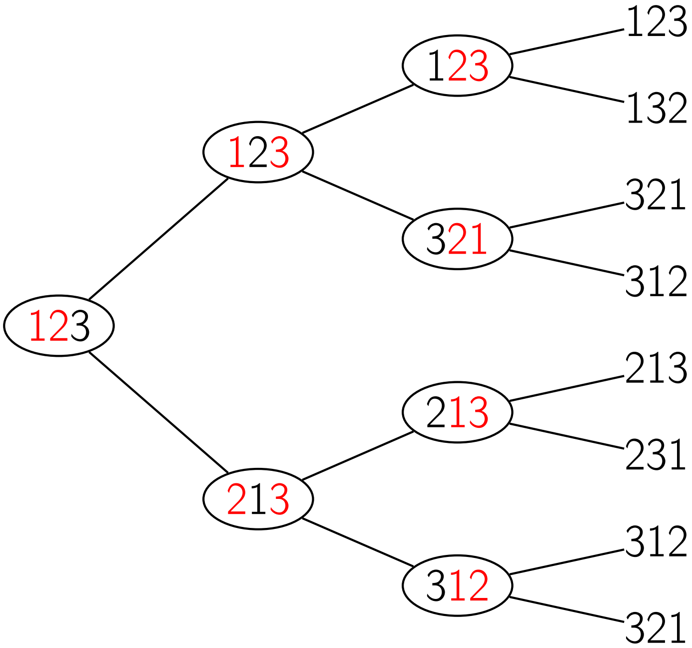
Egyszerű cserés rendezés

```
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    Ciklus j := i+1,...,n
        Ha T[i] > T[j] akkor
            Csere(i,j)
    Ciklus vége
Ciklus vége
```


5 1 2 4 3
5 1 2 4 3
1 5 2 4 3
1 5 2 4 3
1 5 2 4 3
1 5 2 4 3
1 2 5 4 3
1 2 5 4 3
1 2 5 4 3
1 2 4 5 3
1 2 3 5 4
1 2 3 4 5

Véletlen permutáció ???

```
minden i-re T[i] := i
Ciklus i := 1,2,...,n-1
    Ciklus j := i+1,...,n
        Ha „FEJ” akkor
            Csere(i,j)
    Ciklus vége
Ciklus vége
```

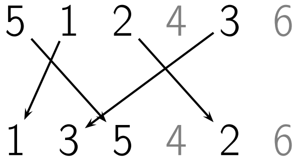

123
123
213
123
321
213
312
123
132
321
312
213
231
312
321

Goro-rendezés

T[1]=5, T[2]=1, T[3]=2, T[4]=4, T[5]=3, T[6]=6

Cél: az elemek növekvő rendezése

Művelet: a „rossz" helyen lévő elemek véletlen permutációja



Google Code Jam 2011

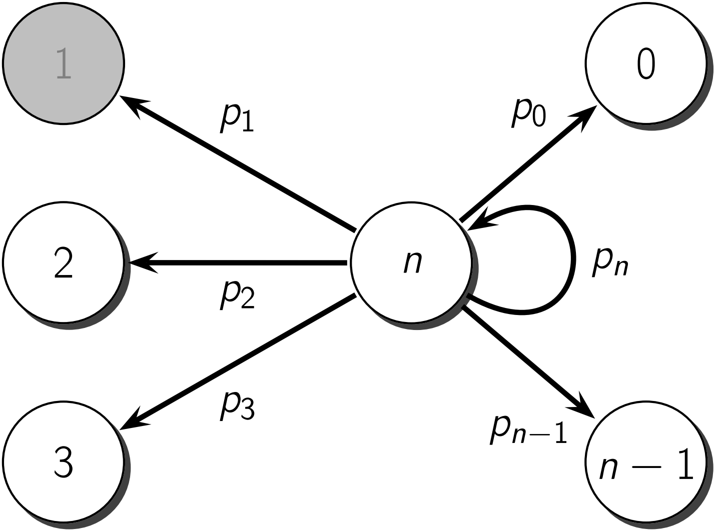
Várhatóan hány lépésben rendez Goro?

Goro-rendezés tulajdonságai

- Csak a kezdetben rossz helyen álló elemek számítanak
- Véletlen permutálunk $\rightarrow$ csak a rossz helyen álló elemek száma érdekes

Kezdetben n elem áll rossz helyen:

$$\text{várható lépésszám} = L(n)$$



1
0
p_1
p_0
2
n
p_n
p_2
p_3
p_{n-1}
3
$n-1$

Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \to L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \to L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \rightarrow L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \rightarrow L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \rightarrow L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \rightarrow L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \rightarrow L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \rightarrow L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

Goro-rendezés

$$L(n) = 1 + p_0 L(0) + p_1 L(1) + \cdots + p_n L(n)$$

- $L(0) = 0$, $L(1) = 0$
- $L(2) = 1 + \frac{1}{2} \cdot L(2) \rightarrow L(2) = 2$
- $L(3) = 1 + \frac{3}{6} \cdot L(2) + \frac{2}{6} \cdot L(3) \rightarrow L(3) = 3$
- Sejtés: $L(n) = n$

Rossz helyen álló elemek

$$\sum_{\pi \text{ perm.}} \#\{\pi\text{-ben rossz helyen álló elemek}\} =$$

$$= \sum_k \#\{\pi | k \text{ rossz helyen áll } \pi\text{-ben}\} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! = (n-1) \cdot n!$$

Rossz helyen álló elemek

$$\sum_{\pi \text{ perm.}} \#\{\pi\text{-ben rossz helyen álló elemek}\} =$$

$$= \sum_{k} \#\{\pi | k \text{ rossz helyen áll } \pi\text{-ben}\} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! = (n-1) \cdot n!$$

Rossz helyen álló elemek

$$\sum_{\pi \text{ perm.}} \#\{\pi\text{-ben rossz helyen álló elemek}\} =$$

$$= \sum_{k} \#\{\pi | k \text{ rossz helyen áll } \pi\text{-ben}\} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-1)! = (n-1) \cdot n!$$

Rossz helyen álló elemek

Átlagosan $\frac{(n-1)\cdot n!}{n!} = n-1$ áll rossz helyen.

$$p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + \cdots + p_n \cdot n = n - 1$$

Átlagosan 1 fixpont van.

Rossz helyen álló elemek

Átlagosan $\frac{(n-1)\cdot n!}{n!} = n - 1$ áll rossz helyen.

$$p_0 \cdot 0 + p_1 \cdot 1 + \cdots + p_n \cdot n = n - 1$$

Átlagosan 1 fixpont van.

Teljes indukció

$$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$$

$$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$$

$$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

Teljes indukció

$$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$$

$$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$$

$$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

Teljes indukció

$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$

$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$

$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$

$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

Teljes indukció

$$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$$

$$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$$

$$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

Teljes indukció

$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$

$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$

$= 1 + (n-1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$

$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

Teljes indukció

$L(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} p_i L(i) =$

$= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot i + p_n L(n) =$

$= 1 + (n - 1) - p_n \cdot n + p_n L(n) =$

$= n - p_n \cdot n + p_n L(n)$

$$(1 - p_n) \cdot (L(n) - n) = 0$$

$$L(n) = n$$

Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma k. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma k. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma k. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma k. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

Merre tovább?

Rendezések általában

- Összehasonlítások száma k. $3^k \geq n!$
- Mit számítunk lépésnek?

Goro-rendezés

- Ciklusok
- Rövidebb várható lépésszámú módszer?

Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

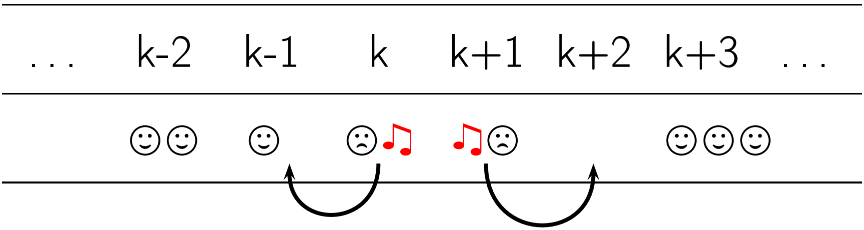
ADMV döntő

A Zenekedvelők Végtelen Kollégiumában egyetlen – mindkét irányban végtelen hosszú – folyosón vannak a lakószobák, egészekkel sorszámozva. Lehetnek üres szobák, és egy szobában többen is lakhatnak.

...	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	...
	☺☺	☺	☺	☺		☺☺☺	

ADMV döntő

Minden szobában áll egy hatalmas zongora, amin a lakók szeretnek játszani. Ha azonban két szomszéd gyakorol a zongorán, az kellemetlen zenei élményhez vezet, ezért egy szobával arrébb költöznek.



ADMV döntő

Bizonyítsuk be, hogy ha a kollégiumnak véges sok lakója van, akkor véges sok nap után abbamarad a költözködés.

Ábrázolás

...	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	...
	☺☺	☺	☺	☺		☺☺☺	

- Szobák lakóinak száma (S_i)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma (L_i)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

Ábrázolás

...	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	...
	☺☺	☺	☺	☺		☺☺☺	

- Szobák lakóinak száma (S_i)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma (L_i)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

Ábrázolás

...	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	...
	☺☺	☺	☺	☺		☺☺☺	

- Szobák lakóinak száma (S_i)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma (L_i)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

Ábrázolás

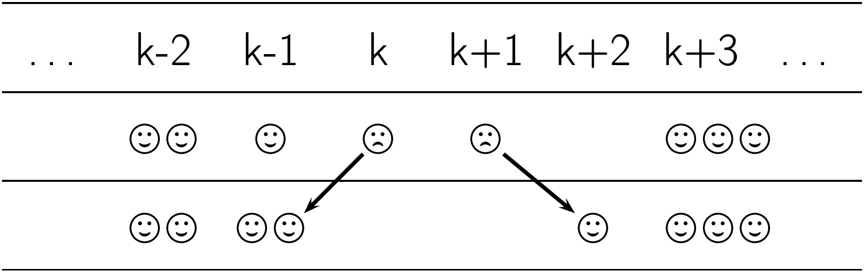
...	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	...
	☺☺	☺	☺	☺		☺☺☺	

- Szobák lakóinak száma (S_i)
  $\ldots, 2, 1, 1, 1, 0, 3, \ldots$
  Melyik szobák?
- Lakók szobájának száma (L_i)
  $k-2, k-2, k-1, k, k+1, k+3, \ldots$

Költözések

```
Ciklus amíg vannak szomszédok
    i := véletlen index,
        amire L[i]+1=L[i+1]
    L[i] := L[i] - 1
    L[i+1] := L[i+1] + 1
    az L[] tömb rendezése
Ciklus vége
```

Ami változik



Különbségek összege ($\nearrow$):

$$\sum |L_i - L_j| + 2(S_k + S_{k+1} - 1) = \sum |L'_i - L'_j|$$

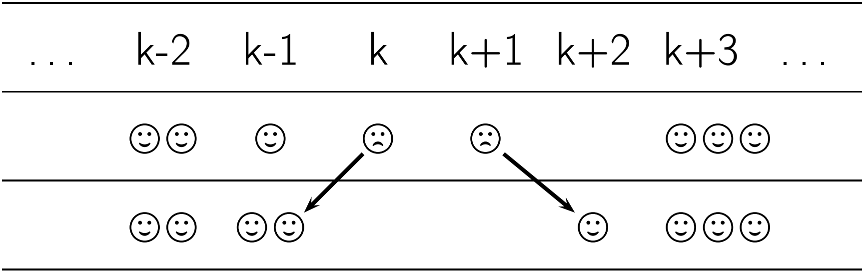
Ami változik

...	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	...
	☺☺	☺	☹	☹		☺☺☺	
	☺☺	☺☺			☺	☺☺☺	

Szobaszámok szorzata ($\searrow$):

$$(k-1)(k+2) = k^2 + k - 2 < k(k+1)$$

Ami változik



Szobaszámok négyzetösszege ($\nearrow$):

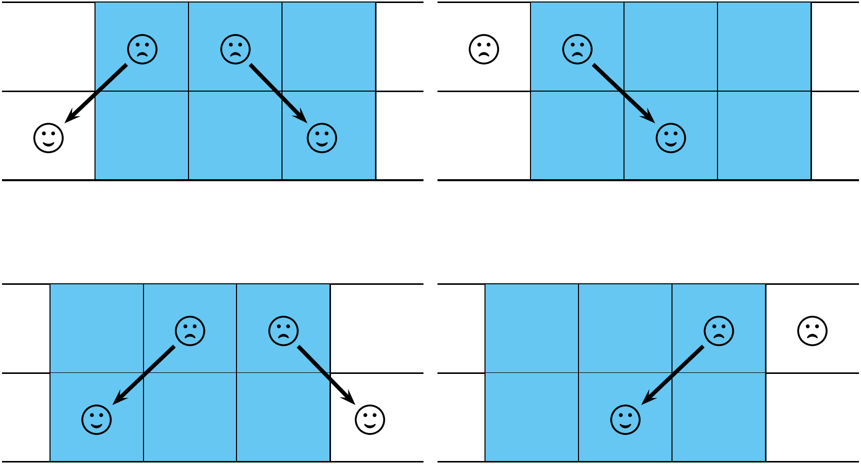
$$(k-1)^2 + (k+2)^2 = 2k^2 + 2k + 5 >$$
$$> 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$$

Ami nem változik

…	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	…
	☺☺	☺	☹	☹		☺☺☺	
	☺☺	☺☺			☺	☺☺☺	

Súlypont: $k + (k+1) = (k-1) + (k+2)$

Három szomszédos szoba



Befejeződés

- Monovariáns (négyzetösszeg):
  Nincsenek ismétlődő állapotok.
- Invariáns (három szomszédos szoba):
  Korlátos tartományban maradunk.
  n lakó,
  kezdetben $\min\{L_i\} = a$, $\max\{L_i\} = b$
  $a - 3n$ és $b + 3n$ között marad minden lakó

Merre tovább?

- Távoli szigetek
- Befejeződés ideje

Merre tovább?

- Távoli szigetek
- Befejeződés ideje

Merre tovább?

- Távoli szigetek
- Befejeződés ideje

Algoritmusok

- Rendezés
- Befejeződés
- Szavak
- Csempézés

Formális nyelvek

$E \to T$

$E \to E + T$

$T \to F$

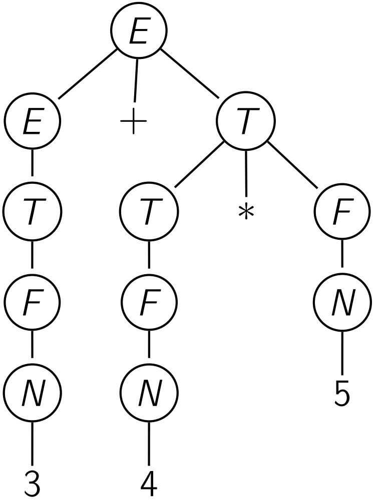
$T \to T * F$

$F \to I$

$F \to (E)$

$I \to$ egész szám

$E \Rightarrow 3 + 4 * 5$



Szavak generálása

- **ábécé**: `{A,B}`
- **kiinduló szimbólum**: `A`
- **helyettesítési szabályok**:

$$\{\mathtt{A} \rightarrow \mathtt{AAB},\quad \mathtt{B} \rightarrow \mathtt{A}\}$$

Példa:

$$\mathtt{ABAB} \Rightarrow \mathtt{AABAAABA}$$

`A`

`AAB`

`AABAABA`

`AABAABAAABAABAAAB`

`AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...`

Észrevételek?

Sorozatot kaptunk

$$w_0 = \texttt{A}$$
$$w_1 = \texttt{AAB}$$
$$w_2 = \texttt{AABAABA}$$
$$w_3 = \texttt{AABAABA}|\texttt{AABAABA}|\texttt{AAB}$$

$$w_{n+1} = w_n w_n w_{n-1}$$

$$w_i \Rightarrow w_{i+1},\ \ w_n = w_{n-1}w_{n-1}w_{n-2} \Rightarrow w_n w_n w_{n-1}$$

Sorozatot kaptunk

w_n kezdőszelete w_{n+1}-nek

Az előállított karakterek később már nem változnak.

`AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...`

$c_1 =$ 'A', $c_2 =$ 'A', $c_3 =$ 'B', $c_4 =$ 'A', ...

Generálás

```
c[1] := 'A'; i := 1; j := 1
Ciklus amíg j ≤ n
    Ha c[i] = 'A' akkor
        c[j]:='A'; c[j+1]:='A'
        c[j+2]:='B'; j:=j+3
    különben c[j]:='A'; j:=j+1
    Elágazás vége
i := i + 1
Ciklus vége
```

Sorozatokat kaptunk

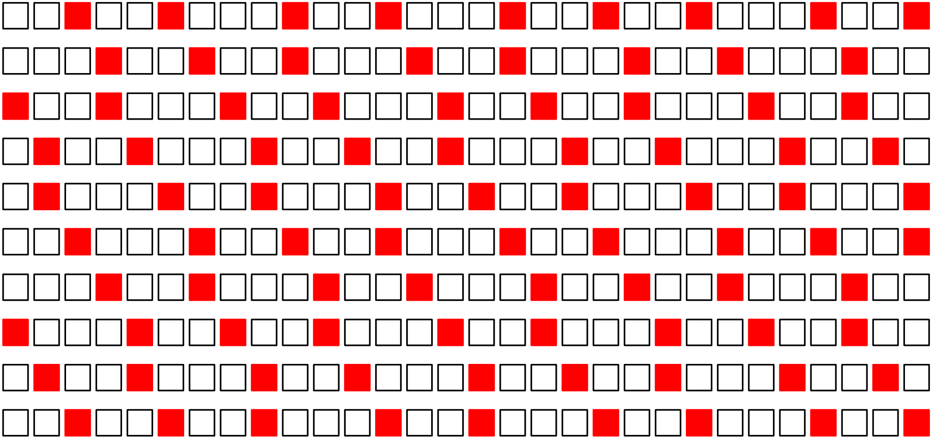
Vizsgájuk az `'A'`-k és `'B'`-k pozícióit!

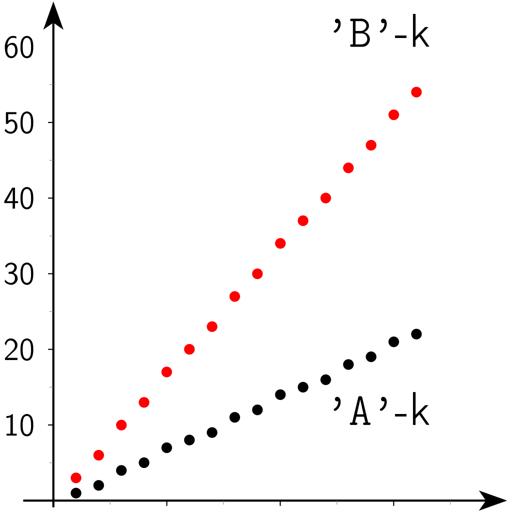
`AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...`

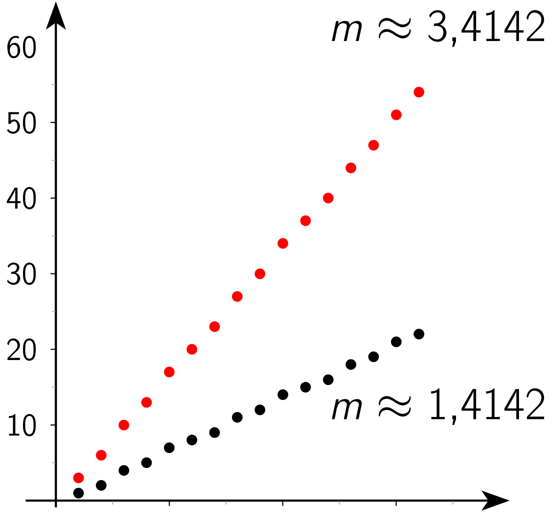
`'A'`: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, ...

`'B'`: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, ...

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAAB
AAABAABAABAAABAABAAABAABAAABAA
BAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAA
ABAABAAABAABAABAAABAABAAABAABA
ABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAAB
AABAAABAABAABAAABAABAAABAABAAB
AAABAABAAABAABAAABAABAABAAABAA
BAAABAABAABAAABAABAAABAABAABAA
ABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABA
AABAABAABAAABAABAAABAABAAABAAB...




'B'-k
60
50
40
30
20
10
'A'-k



$m \approx 3{,}4142$
60
50
40
30
20
10
$m \approx 1{,}4142$

Arányok

w_n	a_n	b_n
`A`	1	0
`AAB`	2	1
`AABAABA`	5	2
`AABAABAAABAABAAAB`	12	5

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad b_{n+1} = a_n$$

Arányok

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \qquad b_{n+1} = a_n$$

$n \geq 2:$

$$t_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2a_n + b_n}{a_n} = 2 + \frac{1}{t_n}$$

$t_{n+1} = 2 + \frac{1}{t_n}$
$t = 2 + 1/t$ pozitív gyöke: $1 + \sqrt{2}$

$$|t_{n+1} - (1 + \sqrt{2})| =$$

$$= |2 + 1/t_n - (1 + \sqrt{2})| = |1 - \sqrt{2} + 1/t_n| =$$

$$= \left|\frac{-1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{t_n}\right| = \left|\frac{1 + \sqrt{2} - t_n}{(1 + \sqrt{2}) \cdot t_n}\right|$$

Periodicitás

$$t_n = a_n / b_n \to 1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

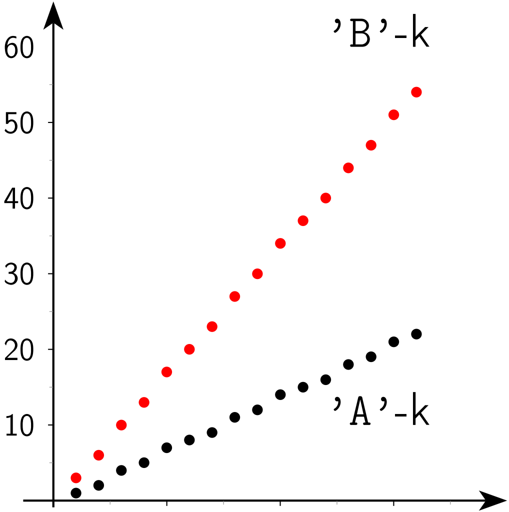
A (c_n) sorozat nem periodikus.

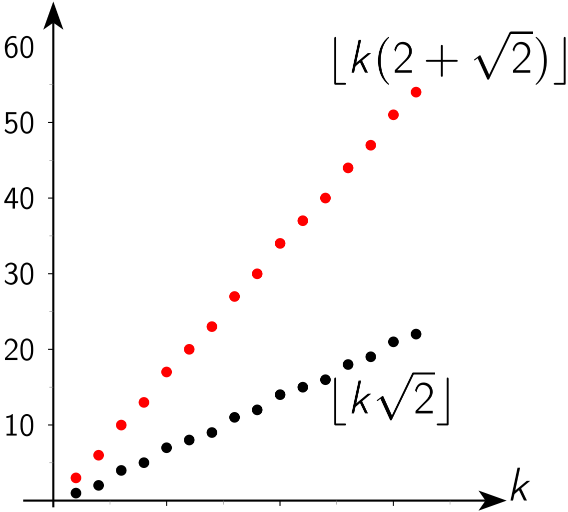
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n + b_n} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

A k. `'A'` indexe $\approx \lfloor k\sqrt{2} \rfloor$

A k. `'B'` indexe $\approx \lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$


'B'-k
'A'-k
60
50
40
30
20
10



60
50
40
30
20
10
$\lfloor k(2+\sqrt{2})\rfloor$
$\lfloor k\sqrt{2}\rfloor$
k

1. lemma

- w tetszőleges `'A'`-`'B'` sorozat
- w hossza n, az `'A'`-k száma a
- $w \Rightarrow w'$
- w' hossza n', az `'A'`-k száma a'

$$\frac{a}{n} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{a'}{n'} \quad \text{vagy} \quad \frac{a'}{n'} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{a}{n}$$

1. lemma bizonyítása

$$n' = n + 2a, \qquad a' = n + a$$

$$a' - \frac{n'}{\sqrt{2}} = n + a - \frac{n+2a}{\sqrt{2}} =$$

$$= -(\sqrt{2} - 1)\left(a - \frac{n}{\sqrt{2}}\right)$$

2. lemma

- $C_n = c_1 c_2 \dots c_n$ a feladatban generált sorozat kezdőszelete
- a C_n-ben szereplő `'A'`-k száma x_n

C_n utolsó karakterén múlik x_n és $\frac{n}{\sqrt{2}}$ sorrendje:

Ha $c_n =$ `'A'`, akkor $x_n > \frac{n}{\sqrt{2}}$, ha pedig $c_n =$ `'B'`, akkor $x_n < \frac{n}{\sqrt{2}}$.

2. lemma bizonyítása

$n = 1, 2, \ldots, 12$ esetén igaz.

- $c_n =$ 'B', $C_m \Rightarrow C_n$ és $c_m =$ 'A'

  $x_m > \frac{m}{\sqrt{2}}, x_n < \frac{m}{\sqrt{2}}$ (1. lemma)
- $c_n =$ 'A'
  - $C_m \Rightarrow C_n$ és $c_m =$ 'B'
  - $C_m B \Rightarrow C_n$ ('AAB' 1. 'A'-ja)
  - $C_m BB \Rightarrow C_n$ ('AAB' 2. 'A'-ja)

’B’-k indexe

C_n utolsó karaktere a k. ’B’

2. lemma C_n-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ ’A’, minden ’B’ előtt legalább 2 ’A’ áll

2. lemma C_{n+1}-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

'B'-k indexe

C_n utolsó karaktere a k. 'B'

2. lemma C_n-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma C_{n+1}-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

'B'-k indexe

C_n utolsó karaktere a k. 'B'

2. lemma C_n-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma C_{n+1}-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2+\sqrt{2}) < n+1$$

'B'-k indexe

C_n utolsó karaktere a k. 'B'

2. lemma C_n-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma C_{n+1}-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2 + \sqrt{2}) < n + 1$$

'B'-k indexe

C_n utolsó karaktere a k. 'B'

2. lemma C_n-re: $\Rightarrow k > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) n$

$c_{n+1} =$ 'A', minden 'B' előtt legalább 2 'A' áll

2. lemma C_{n+1}-re: $\Rightarrow k < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(n+1)$

Összevonva:

$$n < k(2 + \sqrt{2}) < n + 1$$

’`A`’-k indexe

C_n utolsó karaktere a k. ’`A`’

Hasonlóan:

$$n < k\sqrt{2} < n + 1$$

(Nehézség: ’`A`’ után állhat újabb ’`A`’.)

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...

$\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, ...

$\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, ...

$$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$$

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...

$\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, ...

$\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, ...

$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$

$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA...

$\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, ...

$\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, ...

$$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ $\quad$ $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$

AABAABAAABAABAAABAABAABAAABAABAAABA . . .

$\lfloor k\sqrt{2} \rfloor$: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, . . .

$\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor$: 3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, . . .

$$\mathcal{A} = \{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{B} = \{\lfloor k(2+\sqrt{2}) \rfloor \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \qquad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}^+$$

Beatty-tétel

Samuel Beatty (1926)

American Mathematical Monthly P.3173

- $r > 1$ irracionális
- $1/r + 1/s = 1$
- $r_n = \lfloor rn \rfloor$, $s_n = \lfloor sn \rfloor$

Minden pozitív egész előfordul r_n-ben vagy s_n-ben, de mindig csak az egyikben.

Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

Merre tovább?

- Rácsgeometria
- Lánctörtek
- Eldöntési probléma: egy szó benne van-e a generálható szavak halmazában

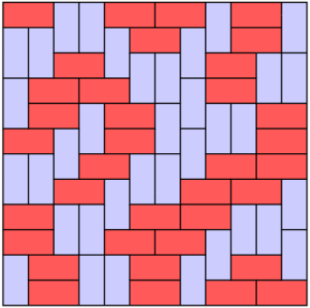
Algoritmusok

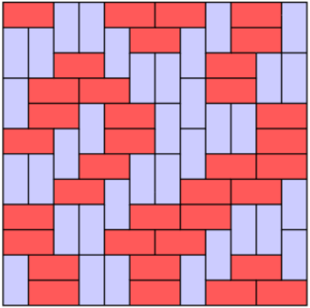
- ▷ Rendezés
- ▷ Befejeződés
- ▷ Szavak
- ▷ Csempézés

- Csempézés

  Mit kérdezhetünk?

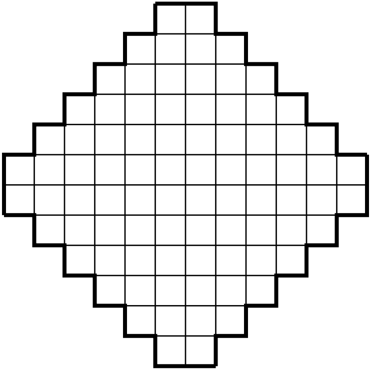
Federico Ardila - Richard P. Stanley: Tilings
Clay Mathematics Institute 2004





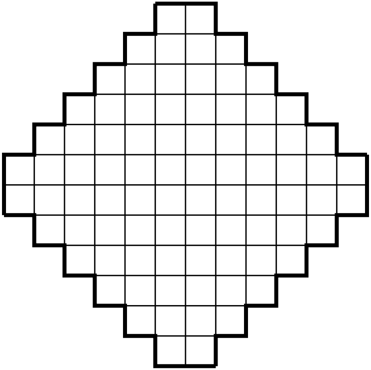
- Csempézhető?
- Hányféle módon csempézhető?
- Nagyjából hányféle módon csempézhető?
- Könnyű találni egy csempézést?
- Könnyű bizonyítani, hogy nem csempézhető?
- Hogy néz ki egy „tipikus” csempézés?

Aztég gyémánt csempézése

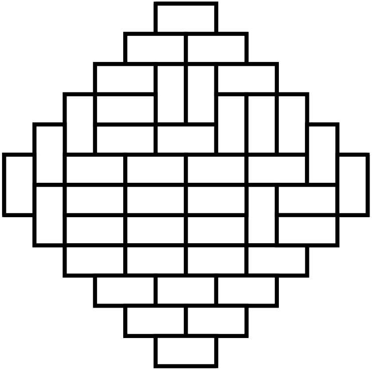


Azték gyémánt

Azték gyémánt csempézése



Azték gyémánt



Csempézés dominókkal

Sokan vannak?

Hányféle módon csempézhető az *n*-edrendű Aztték gyémánt 2×1-es dominókkal?

$$AGY(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Sokan vannak?

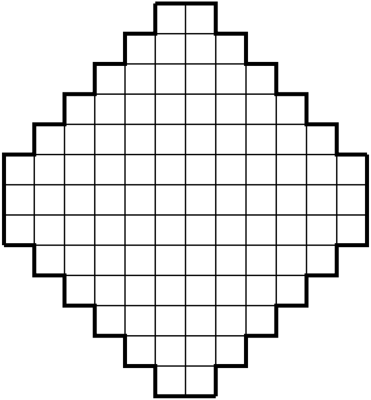
Hányféle módon csempézhető az n-edrendű Aztték gyémánt 2×1-es dominókkal?

$$AGY(n) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

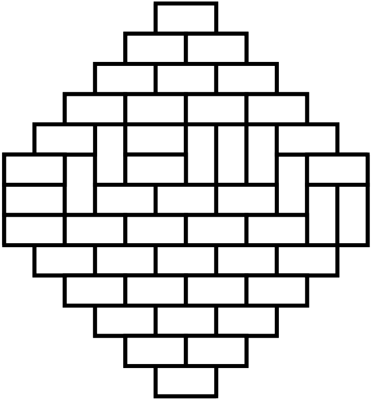
▷ Csempézés

Utak és dominók

Kibővített Azték gyémánt

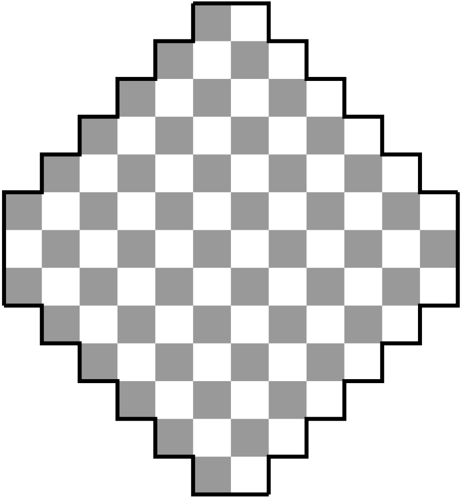


Kibővített A.GY.

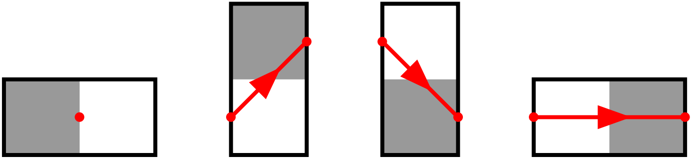


Csempézés dominókkal

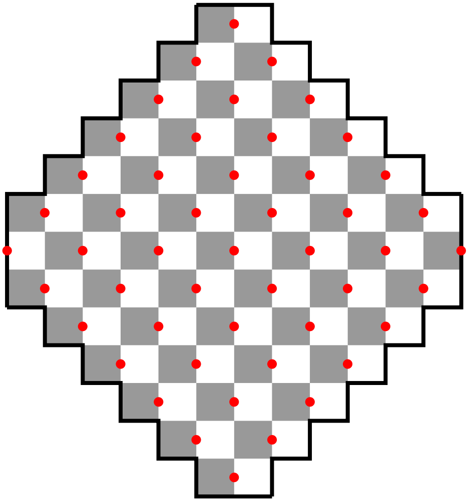
Sakktábla színezés



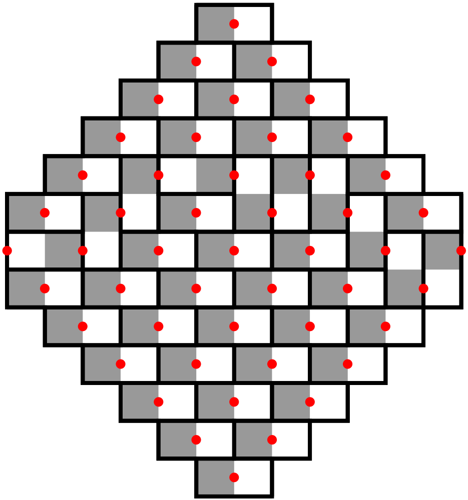
Utak és dominók



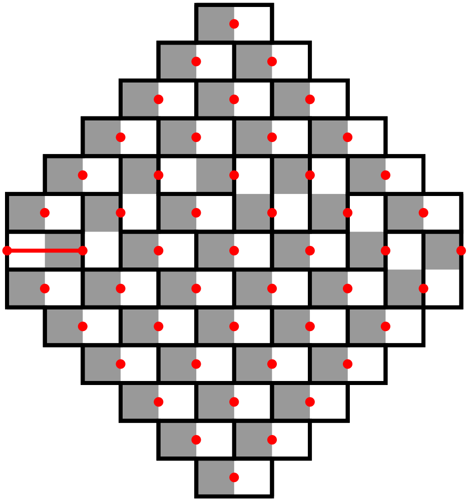
Csempézés → út



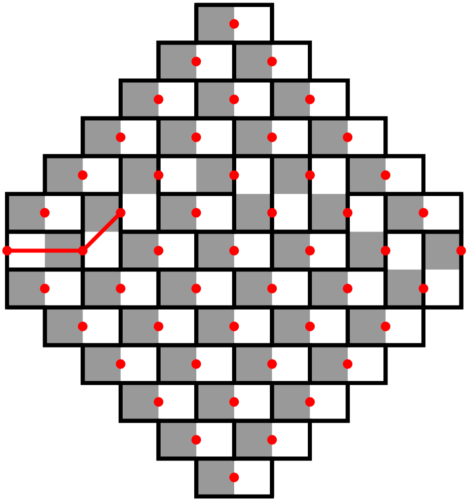
Csempézés → út



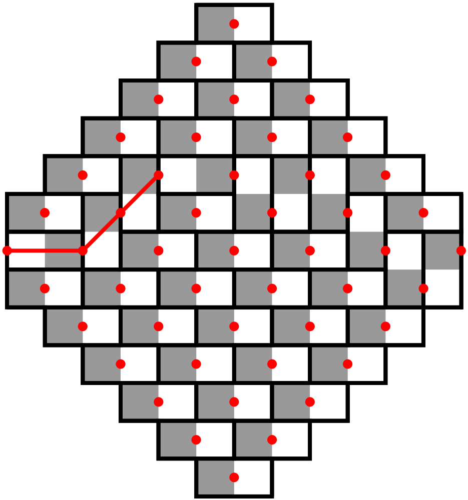
Csempézés → út



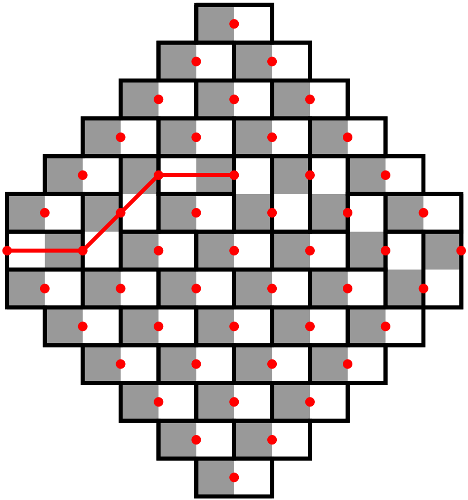
Csempézés → út



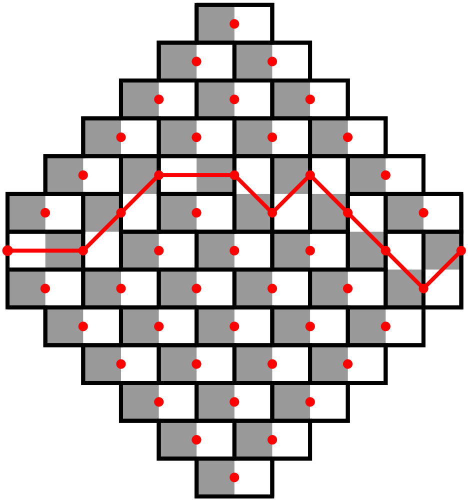
Csempézés → út



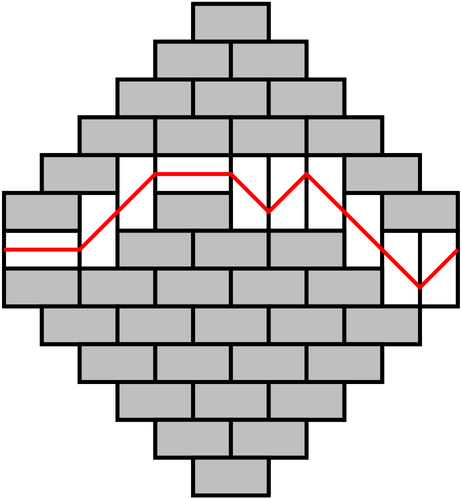
Csempézés $\rightarrow$ út



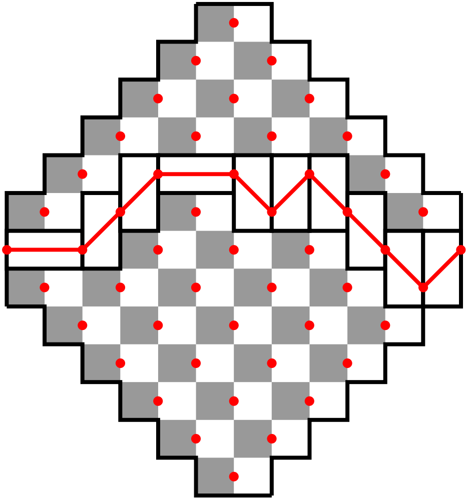
Csempézés → út



Csempézés → út



Út → csempézés?

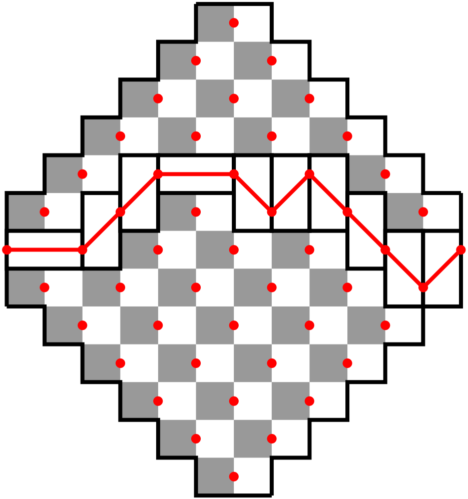


Lefedjük a rácsutat a szabályunk szerint dominókkal.

A kimaradó rész csempézhető dominókkal?

Egyértelműen?

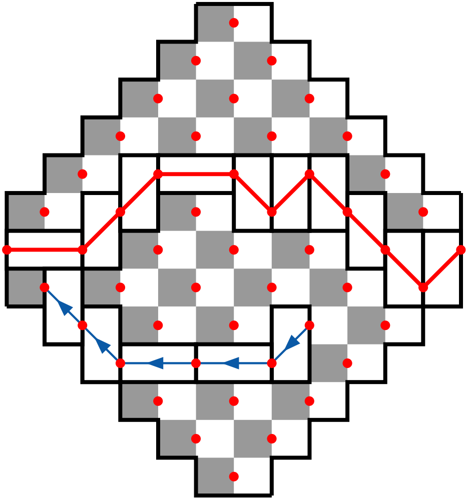
Lefedhetőség



A fedetlen fehér mezők mellett fedetlen fekete mező van.

A kimaradó rész csempézhető vízszintes, fekete$\longrightarrow$fehér dominókkal.

Egyértelműség

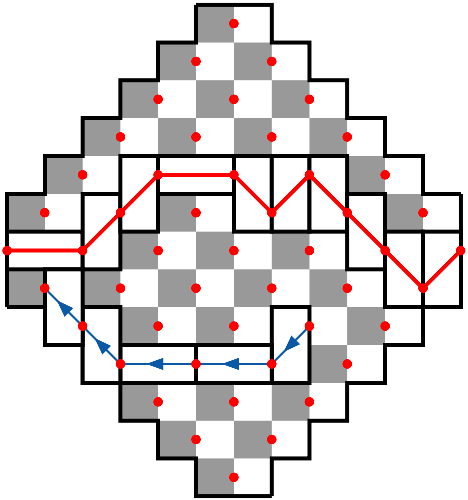


Ha lenne az előzőtől különböző fedés. . .

. . . visszafelé is elindíthatnánk egy utat. . .

. . .aminek fehér mezőre kellene érkeznie.

Egyértelműség

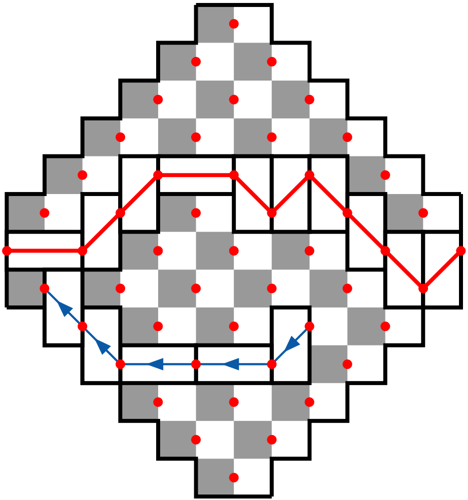


Ha lenne az előzőtől különböző fedés. . .

. . . visszafelé is elindíthatnánk egy utat. . .

. . .aminek fehér mezőre kellene érkeznie.

Egyértelműség

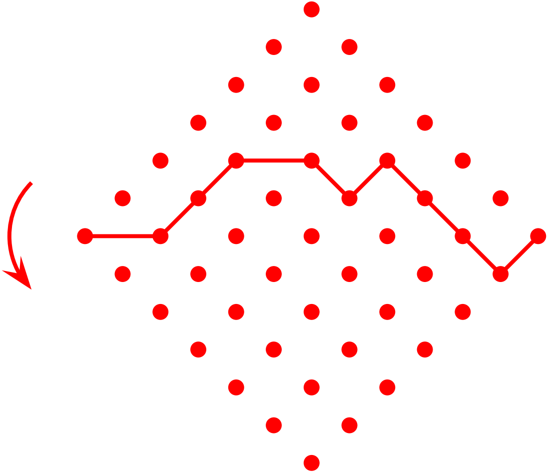


Ha lenne az előzőtől különböző fedés. . .

. . . visszafelé is elindíthatnánk egy utat. . .

. . .aminek fehér mezőre kellene érkeznie.

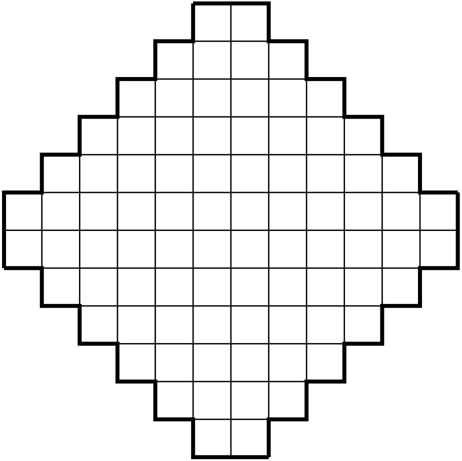
Mit is kell megszámolni?



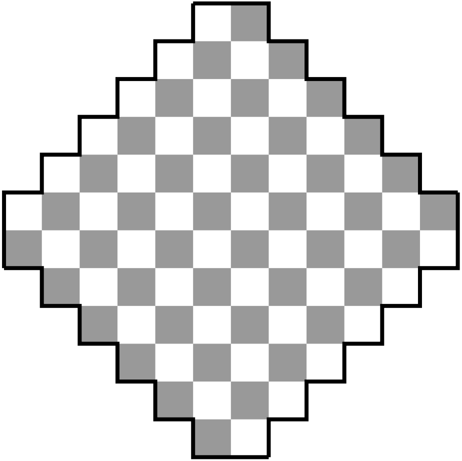
Delannoy-számok

6	1	13	85	377	1289	3653	**8989**
5	1	11	61	231	681	**1683**	3653
4	1	9	41	129	**321**	681	1289
3	1	7	25	**63**	129	231	377
2	1	5	**13**	25	41	61	85
1	1	**3**	5	7	9	11	13
0	**1**	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6

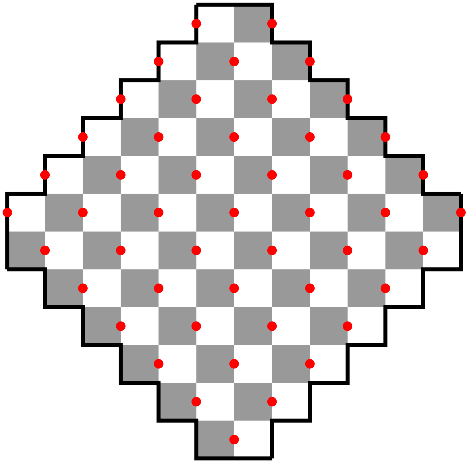
Az eredeti feladat



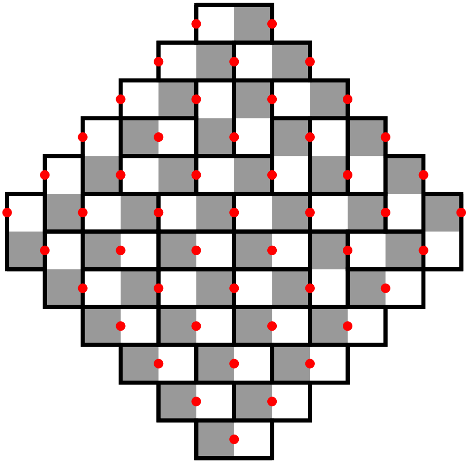
Sakktábla



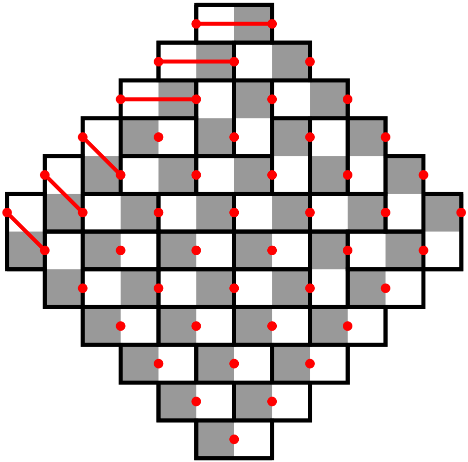
Rácspontok



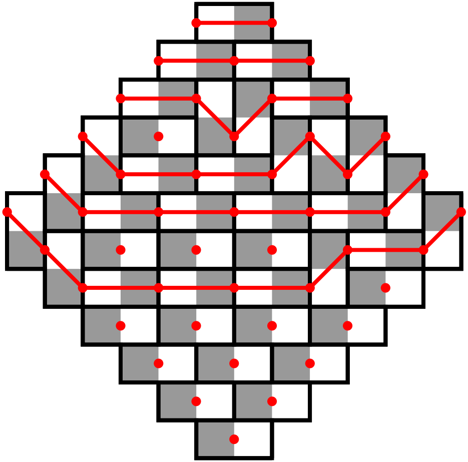
Dominók



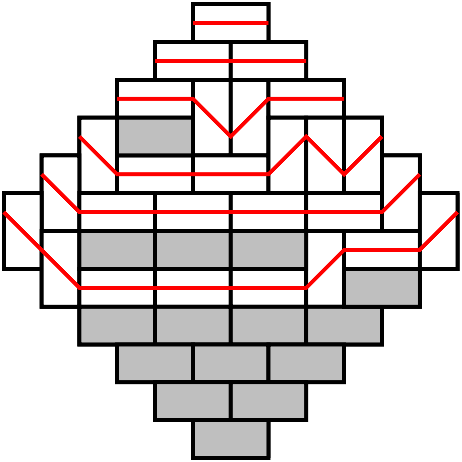
Utak



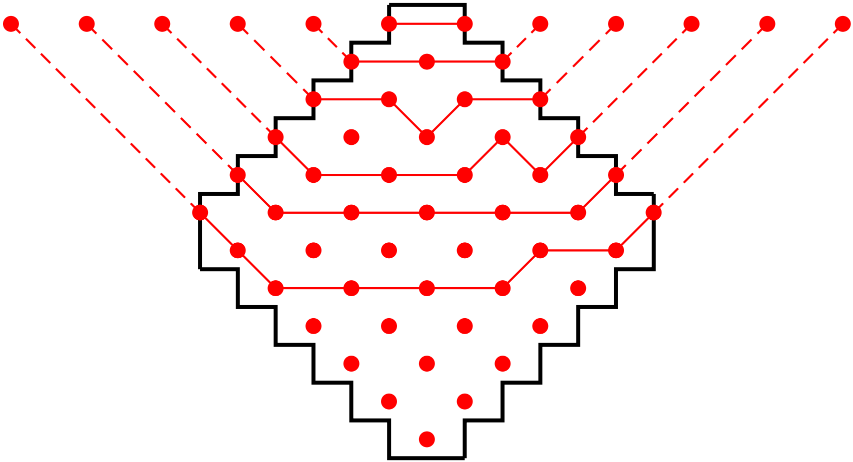
Nem metsző útrendszer



Csempézés ↔ útrendszer



Az útrendszer kiterjesztése



Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\longrightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\longrightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\longrightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\longrightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\longrightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\longrightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\longrightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\longrightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\longrightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\rightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\rightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\rightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\rightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\rightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\rightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

Most már örülhetünk?

Még nem igazán:

Nem metsző útrendszerek száma $\rightarrow$

Gessel-Viennot determináns $\rightarrow$

kis és nagy Schröder-számok $\rightarrow$

determináns értékének meghatározása rekurzióval

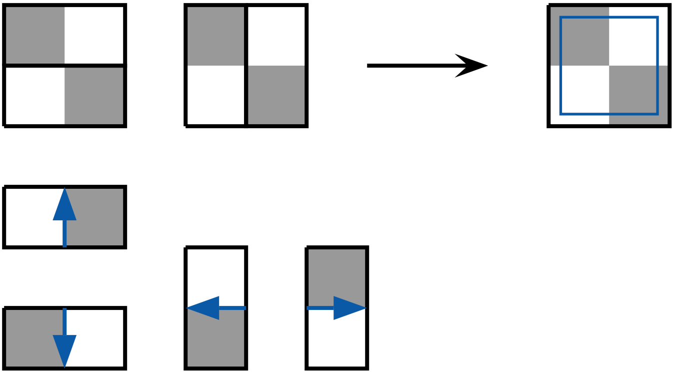
- Csempézés

  Felfújás

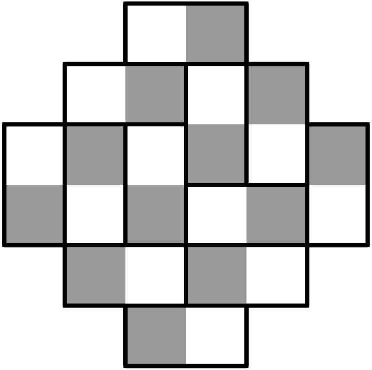
A felfújás lépései

- „páratlan blokkok” törlése
- dominók irányítása
- dominók mozgatása
- „páratlan blokkok” kitöltése

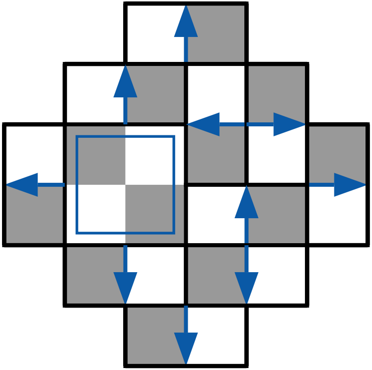
Törlés és irányítás



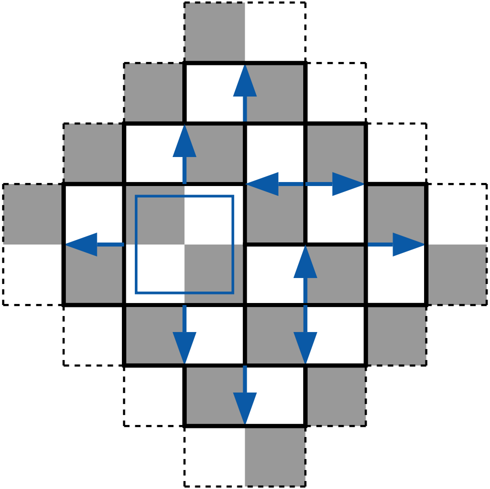
Példa: csempézés



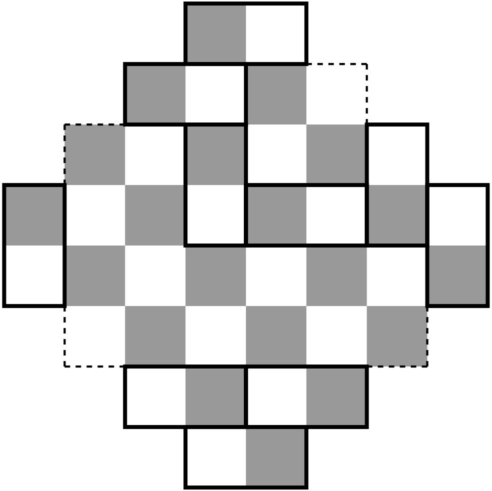
Példa: törlés és irányítás



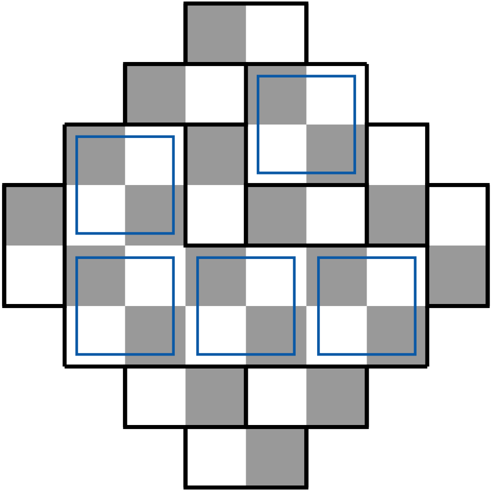
Példa: kiterjesztés



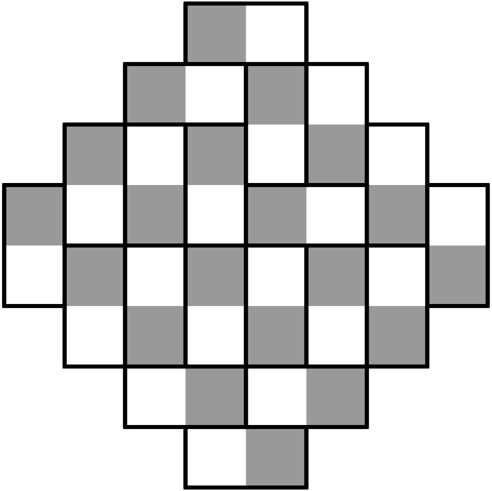
Példa: mozgatás



Példa: kitöltés



Példa: kitöltés

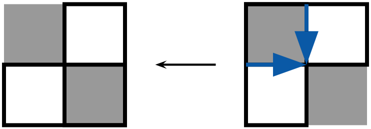


A felfújás tulajdonságai

- az elmozgatott dominók nem fedik egymást
- az elmozgatott dominók az eggyel nagyobb Azték gyémánt részleges csempézését adják
- a lefedetlen rész előáll 2×2-es „páratlan blokkok” egyesítéseként

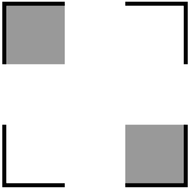
A felfújás tulajdonságai

Létrejöhet átfedés?



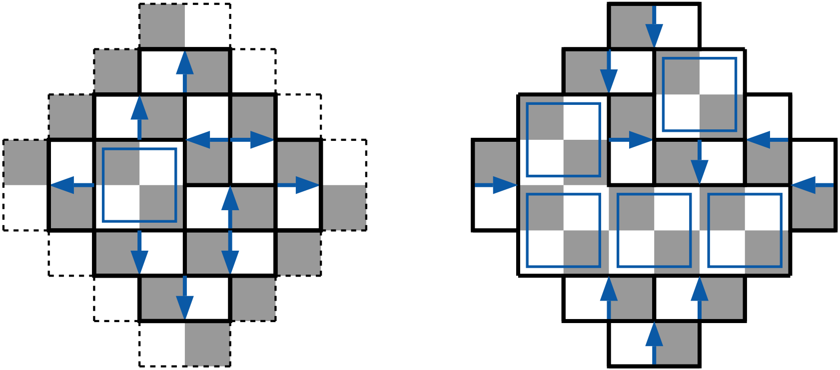
Nem fedik egymást az elmozgatott dominók.

Az üres terület sarkai:



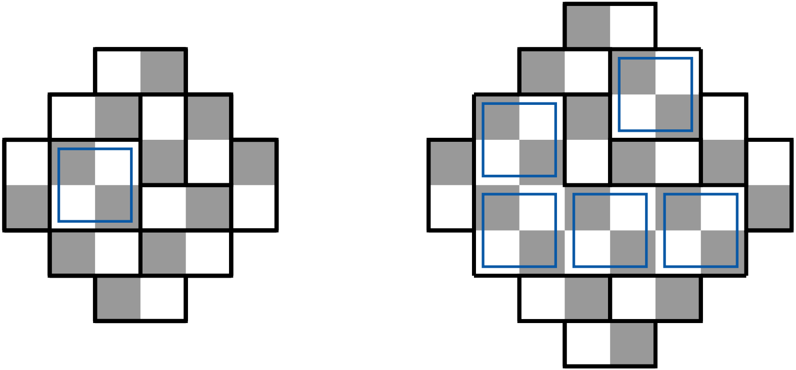
A kimaradó rész „páratlan blokkokból” áll.

Involúció



A „páratlan blokkoktól” mentes csempézéseken a felfújás (leeresztés) kölcsönösen egyértelmű.

$\mathbf{AGY(n)} \to \mathbf{AGY(n+1)}$

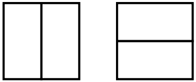


$4(n+1)$ új mező $\to$ $n+1$ új „páratlan blokk”

$\to 2^{n+1}$-féle csempézés

Teljes indukció

- $AGY(1) = 2$



- $AGY(n+1) = 2^{n+1} \cdot AGY(n)$
- $AGY(n+1) =$

$$= 2^{n(n+1)/2} \cdot 2^{n+1} = 2^{(n+1)(n+2)/2}$$

Csempézések száma

n	1	2	3	4	5	6
$AGY(n)$	2	8	64	1024	32768	2097152

exponenciális növekedés:

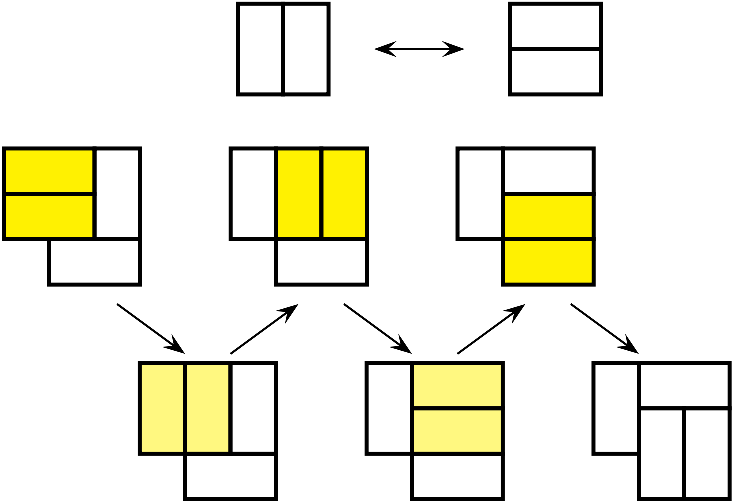
nem tudjuk az összes csempézést felsorolni

Hogyan állítható elő egy véletlen csempézés?

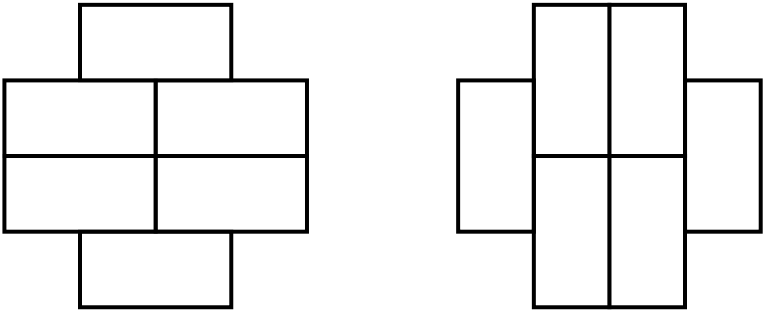
- Csempézés

  Magasságfüggvények és forgatás

Átalakítás forgatással

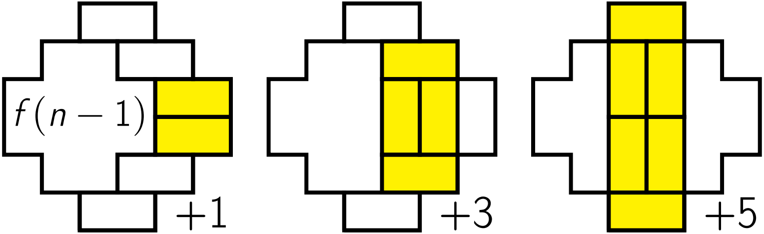


Minimálisból maximális



Minimálisból maximális

Sztranyák Attila bizonyítása



Minimálisból maximális

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1 \\
f(n) &\leq f(n-1) + (1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) \\
f(n) &\leq f(n-1) + n^2 \\
f(n) &\leq 1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

Általában?

Tétel: Az n-edrendű AGY bármelyik csempézéséből legfeljebb

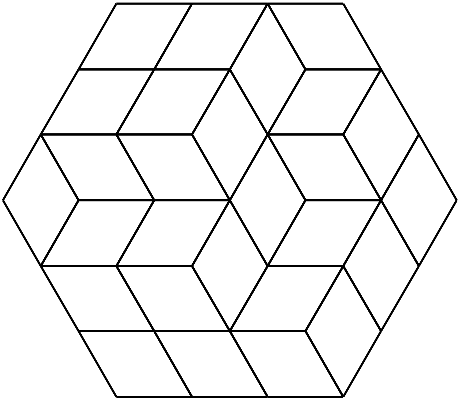
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

forgatással eljuthatunk a minimális (csupa vízszintes) csempézéshez.

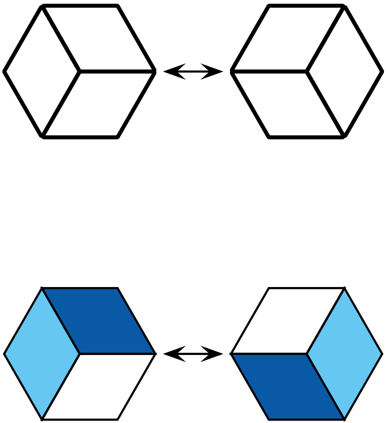
Következmények

1. Két tetszőleges csempézés átvihető egymásba forgatásokkal.
2. A minimális csempézésből indulva $O(n^3)$ forgatással bármelyik csempézés előállítható.

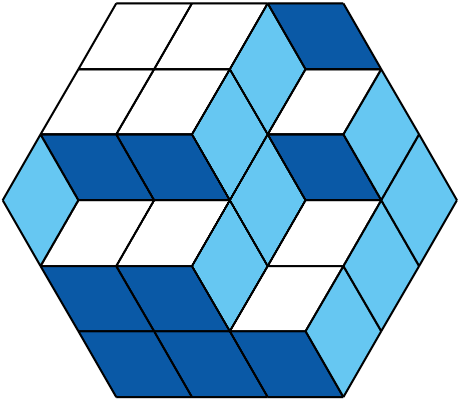
Csempézés rombuszokkal



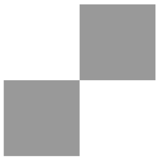
Forgatás és emelés

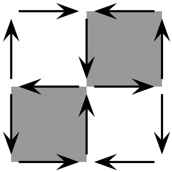


Csempézés megemelése

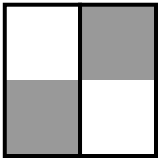


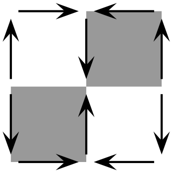
Élek irányítása





A nyíltól balra fekete,
jobbra fehér mező van.

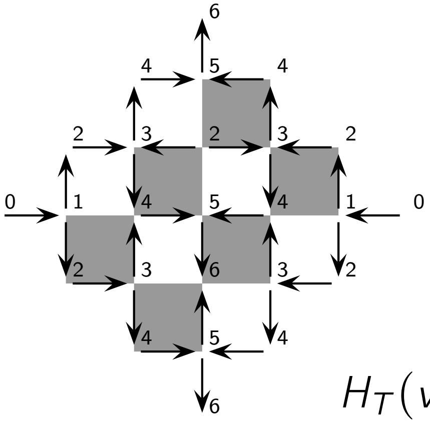




A dominóval fedett
éleket elhagyjuk.

Magasságfüggvény

Kijelölünk egy 0 magasságot. A nyíl irányában $+1$, vele szemben -1 a magasság változása.

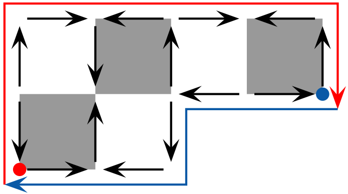


$H_T(v_i)$

Konzisztencia

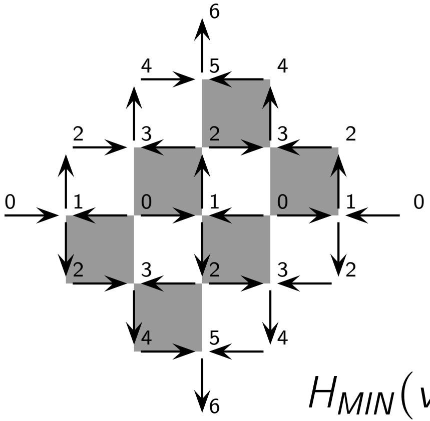
Állítás: Egy csúcs magassága független attól, milyen úton jutottunk oda.
($\rightarrow$ A magasságfüggvény jól definiált.)

„Bizonyítás": Zárt görbén nulla az összeg.



A minimális csempézés

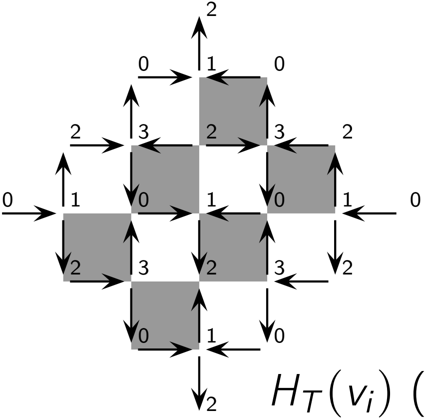
A csupa vízszintes dominóból álló csempézésben minden csúcs magassága minimális.



$H_{MIN}(v_i)$

Magasságfüggvény (mod 4)

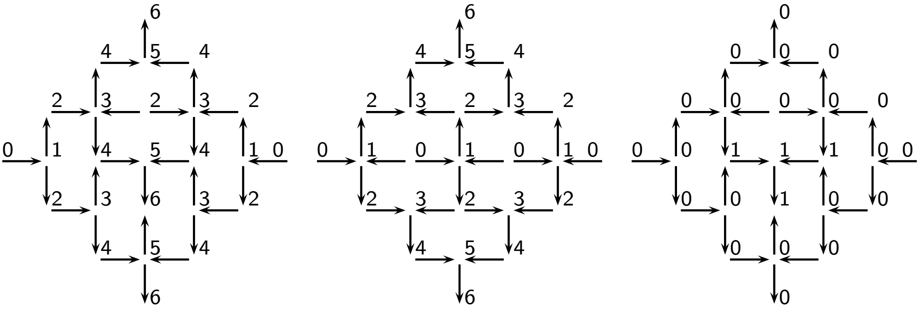
$H_T(v_i)$ négyes maradéka nem függ a csempézéstől.



$H_T(v_i) \pmod 4$

Redukált magasságfüggvény

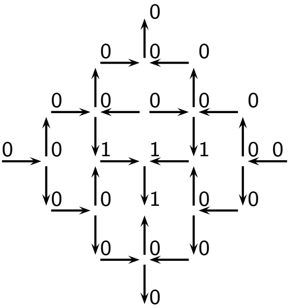
$$h_T(v_i) = (H_T(v_i) - H_{MIN}(v_i))/4$$



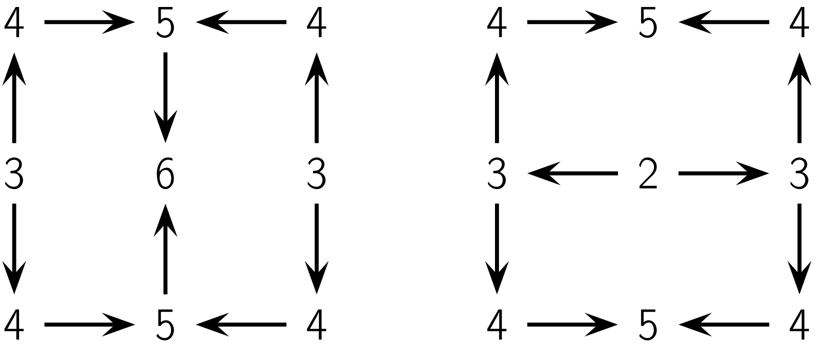
H_T H_{MIN} h_T

Csempézés rangja

$$\mathrm{rang}(T) = \sum_{v_i} h_T(v_i) = 4$$



Forgatás és magasságok



Forgatás és rang

Ha a v csúcsban forgatunk:

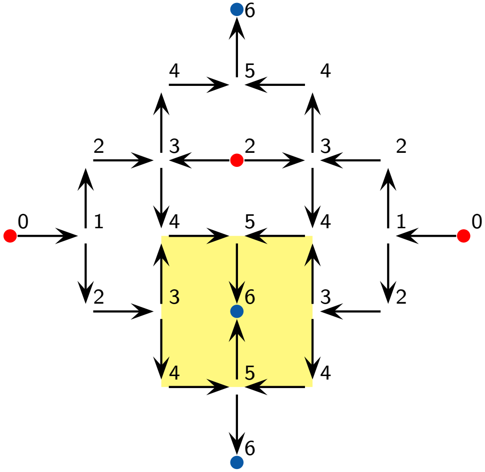
- $w \neq v$ esetén $H_{T'}(w) = H_T(w)$
- $H_{T'}(v) = H_T(v) \pm 4 \rightarrow$
  $h_{T'}(v) = h_T(v) \pm 1$
- forgatásnál a rang 1-gyel változik

Forgatás és rang

Ha egy csempézés rangja r, akkor legalább r forgatás kell a minimális csempézés előállításához.

(A minimális csempézés rangja 0.)

Mindig lehet forgatni?



Forgatás középpontja: $H_T(\ )$ lokális szélsőértéke.

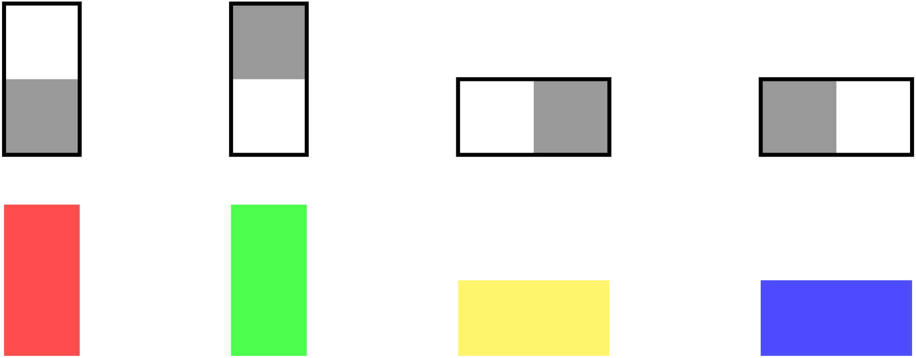
Csempézések távolsága

A csupa függőleges dominó esetén a rang:

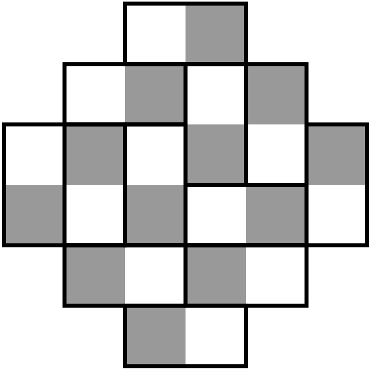
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

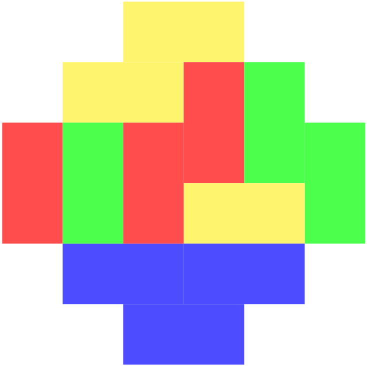
Legfeljebb ennyi forgatással bármelyik csempézésből megkapható a minimális, és bármelyik csempézés megkapható a minimálisból legfeljebb ennyi lépésben.

Dominók színezése



Sarkkör-tétel ($n = 3$)

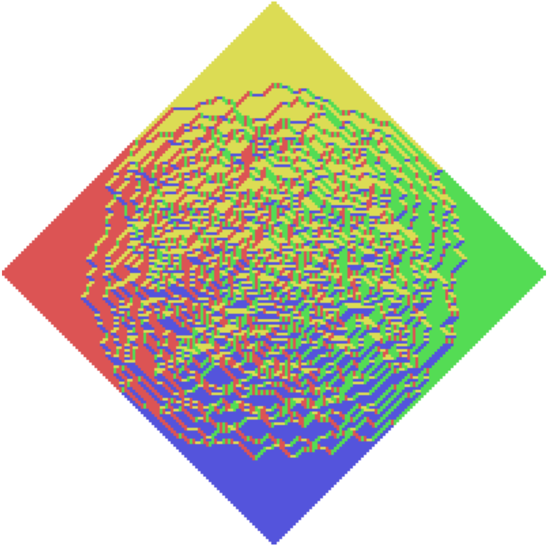




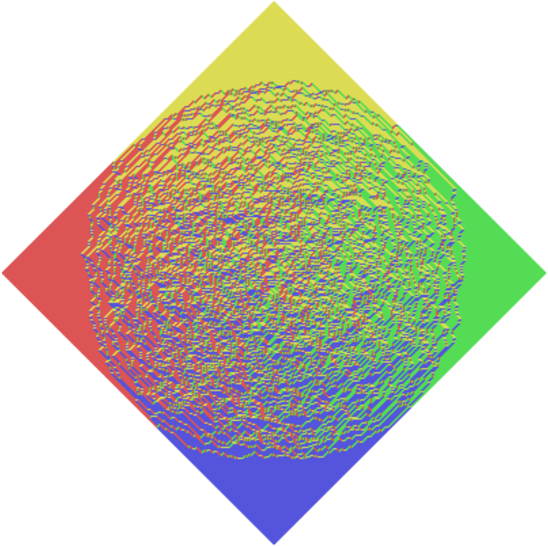
A következő ábrák Tihanyi Balázs programjával készültek.

`http://users.hszk.bme.hu/~tb649/diamond/`

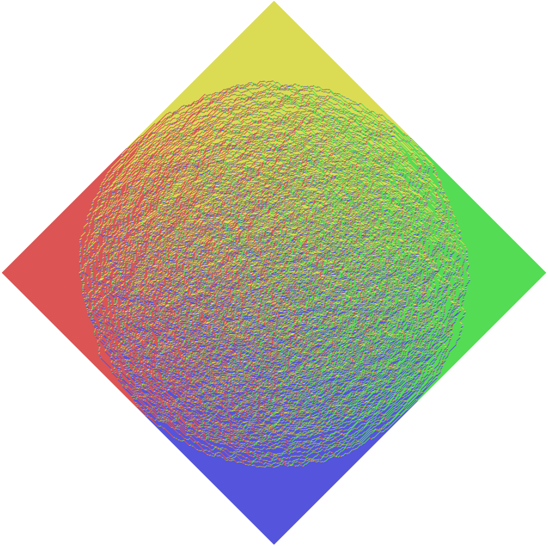
Sarkkör-tétel ($n = 100$)



Sarkkör-tétel ($n = 200$)



Sarkkör-tétel ($n = 500$)



Miből tanuljunk programozni?

▷ Szlávi Péter, Zsakó László
Módszeres programozás

▷ R. Rivest, T. Cormen, C. Leiserson
Új algoritmusok

▷ A. Engel
Exploring Mathematics with your Computer

▷ Introduction to Programming in Java

http://introcs.cs.princeton.edu/java/home/

▷ Project Euler

http://projecteuler.net

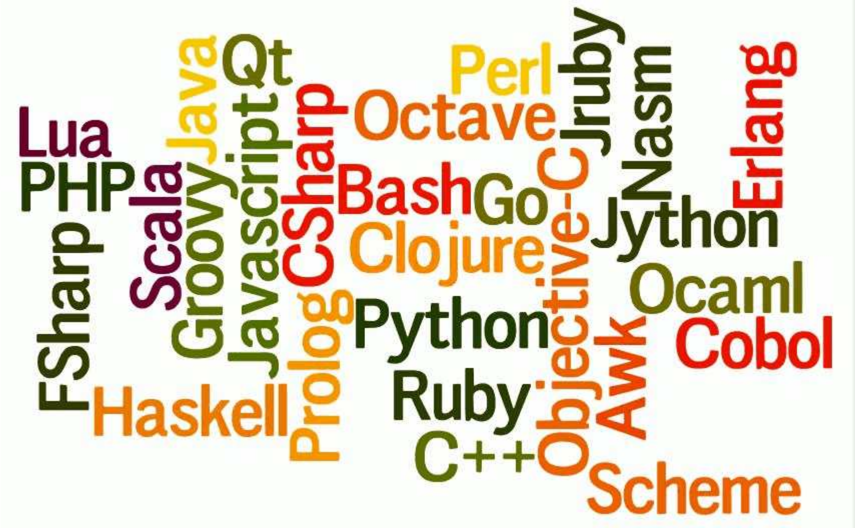
▷ Code Jam

http://code.google.com/codejam/contests.html

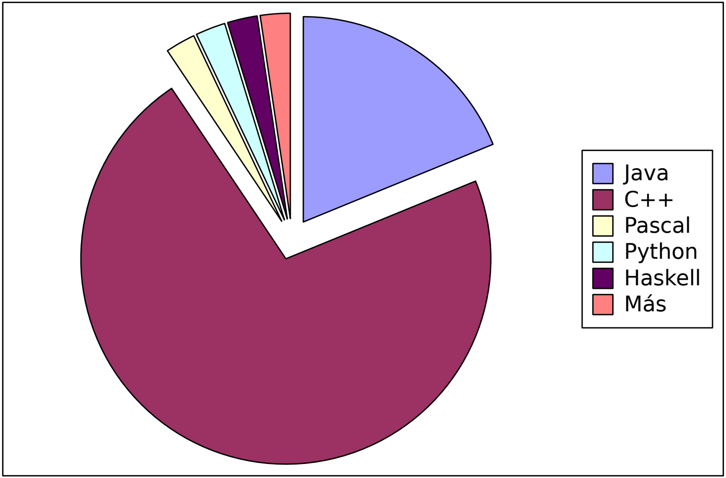
▷ Algoritmus szakkör

http://prog.berzsenyi.hu:8080/prog

Programozási nyelvek



Code Jam 2011 TOP 20%



Házi feladat

Köszönöm a figyelmet!