

Mitől realiztikus egy matematikai probléma?

Szöveges feladatok szerepe az általános iskolai matematikaoktatásban

Csíkos Csaba

Szegedi Tudományegyetem,
Bölcsészettudományi Kar,
Neveléstudományi Intézet

Előadásvázlat

- Milyen előnyöket biztosíthat közoktatásunk számára a realiztikus matematikai szemléletmód?
- Miként tesztelhető a realiztikus matematikai tudás?
 - A holland realiztikus matematikai mozgalom
 - Példák nemzetközi és hazai vizsgálatokból
- A matematikai szöveges feladatok iskolai funkciói

A realiztikus megközelítésmód fontossága

- PISA és TIMSS felmérések tudásfogalma
- A „tradicionalis” és „realisztikus” megközelítésmód összehasonlítása az eredményesség szempontjából

A PISA tudásfelfogása

- Matematikai kulturális eszköztudás, matematikai műveltség
 - az egyén képes legyen arra, hogy felismerje és megértse a matematika szerepét a világban
 - használja matematikai tudását az életben felmerülő szükségleteknek megfelelően
 - a matematikai eszköztudásnak több szintje van, attól függően, hogy a matematikai tudás felhasználása során a tanuló milyen szintű elemzésre, következtetéses gondolkodásra és kommunikációra képes
- „the PISA assessment focuses on real-world problems” vagyis „a PISA felmérés a valós életből vett problémákra épül”

A TIMSS tudásfelfogása

- A TIMSS 2007 felmérés algebrai részterületének meghatározásánál találjuk a következőt: „they should be able to solve real-world problems”, vagyis „meg kell(ene) tudniuk oldani valós életből vett problémákat”

A „tradicionális” és a „realisztikus” szemléletmód összehasonlítása

- A holland „háború”
 - Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen [Royal Dutch Academia of Sciences] (2009). *Rekenonderwijs op de Basisschool. Analyse en Sleutels tot Verbetering.* [Mathematics education in the elementary school. Analysis and keys to improvement.] Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen: Amsterdam.
- „in general, the relationship between mathematical instructional approaches (namely, traditional and realistic approaches) and mathematical proficiency has not been unequivocally evidenced.”

A holland realisztikus matematikai mozgalom

- Hetvenes évek válasza két korábbi irányzatra
 - Új Matematika
 - Halmazok, számrendszerek
 - Bourbaki: 1935-től szigorú, halmazelméleti matematikai építkezés
 - Dieudonné: Euklidesznek mennie kell!
 - Mechanikus matematika
 - Drillízú gyakorlatok sorozata

A Freudenthal Intézet

- 1971 óta
- Matematika mint emberi tevékenység
- A tanulóknak lehetőséget adni arra, hogy megfelelő irányítás mellett tevékenység közben „újra-felfedezzék” a matematikát

Félreértések a „realisztikus” jelző körül

- Hollandul: „zich realiseren” azt jelenti: elképzelni
- Nem csak a valóságos jelenségek elképzelését jelenti, hanem a fantáziavilág, a mesék szereplői is felbukkanhatnak realisztikus feladatokban

Streefland hozzájárulása

- A realisztikus matematikai mozgalom középpontjában állnak a szöveges feladatok
- A szöveges feladatok ne matematikai műveletek gyakorlóterepei legyenek, hanem a matematikai megértés elősegítői
- „model of” helyett „model for”
 - Matematikai modellje valaminek ↔ matematikai modell valamihez

Mitől realisztikus egy matematikai probléma? – A kérdés megközelítésének két axiómája

- 1. axióma: (Realisztikus) szöveges feladatok tulajdonságain keresztül értelmezhető a realisztikusság
- 2. axióma: A realisztikusság NEM kizárólag a feladat jellemzője, hanem nagymértékben a feladat és a feladatmegoldó közötti viszonyé

Szöveges feladatok kategóriái a realisztikusság szempontjából

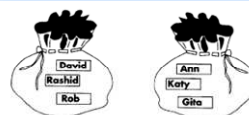
- Formális utasítás vagy matematikai fogalmakat és szimbólumokat összekapcsoló szöveg
- „Szövegbe öltöztetett matematikai struktúra”
- Realisztikus feladat
- Autentikus feladat

Szöveges feladatok kategóriái a realizztikusság szempontjából

- Formális utasítás vagy matematikai fogalmakat és szimbólumokat összekapcsoló szöveg
- „Szövegbe öltöztetett matematikai struktúra”
- Realisztikus feladat
- Autentikus feladat

Példa ál-realisztikus feladatra

Dávid és Gitta csoportja teniszeversenyt szervez vegyespárosok részvételével, vagyis egy fiú és egy lány alkot egy párt. A három fiúnevet egy zacskóba tették, a három lánynevet pedig egy másikba.



Találd meg az összes lehetséges megoldást, ahogyan a fiúk és lányok párhoz állíthatók! Írd ide le a párokat. Egy párt már fel is írtunk: Rob és Katy

The Tennis item. Source: Cooney and Dunne, 1998, p. 132.

Realisztikus (?) feladat

Egy irodaházban ez a felirat található a liftben:

A lift 14 embert szállíthat.

A reggeli csúcsforgalomban 269 ember akar felmenni a lifttel. Hány csoportban férnek be a liftbe ezek az emberek?

Realisztikus feladat

Illinois Állam matematikatesztjének egyik feladata:

Kathy 40 cent értékben vásárolt földimogyorót. June 8 uncia földimogyorót vett. Melyik lány vett több földimogyorót?

- a) June
- b) Ugyanannyit vásároltak
- c) Kathy kétszer annyit vásárolt
- d) Kathy egy unciával többet vásárolt
- e) Nem lehet eldönteni

A 10 literes kerti locsolóban 6 liter víz van. Mennyi víz lesz benne, ha még 6 literet öntünk bele? $10 + 6 = 16$ liter víz van benne.

Autentikus feladatok háromféle értelmezése

1. Valós, a gyermek számára autentikus problémahelyzetek szöveges emulációja
2. A megoldási út nem ismert a problémamegoldó előtt
3. Autentikus tevékenység: a feladat hozzáillesztése egy valós problémahelyzethez

Példa autentikus feladatra az amerikai NCTM tantervi ajánlásából

- Hasonlítsd össze, hogy melyik papírrepülő repül messzebbre: az, amelyiket puha fénymásolópapírból készítesz, vagy az, amelyiket ugyanolyan méretű kemény kartonpapírból! Mindkét repülőt ugyanazzal a hajtogatási technikával készítsd!

További példák realiztikus feladatokra

- Bálint és Aliz ugyanabba az iskolába járnak. Bálint 17 kilométerre lakik az iskolától, Aliz pedig 8 kilométerre. Hány kilométerre lakik egymástól Bálint és Aliz?
- Nagypapa a 4 unokájának egy dobozban 18 léggömböt ad, amit az unokák egyenlően osztanak szét. Hány léggömböt kap egy-egy unoka?
- Karcsinak 5 barátja van, Gyurinak pedig 6. Karcsi és Gyuri úgy döntöttek, hogy együtt rendeznek egy bulit. Meghívták valamennyi barátjukat, akik mind el is jöttek. Hány barát volt ott a partin?

Tanulságok

- Szocio-matematikai normák
- Társadalmi és nemek közötti egyenlőtlenségek

A szöveges feladatok típusai történeti szempontból

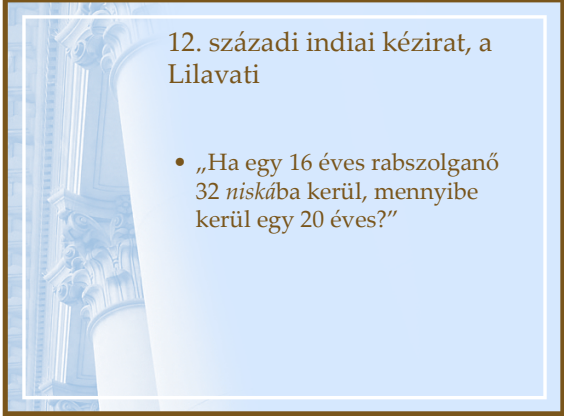
- Az ókortól kezdve a szöveges feladatok három szerepköre figyelhető meg:
 - matematikai művelet szövegbe öltöztetése, amikor a számolási és más műveleti készségek gyakoroltatása a cél
 - a valóság matematikai modellezése, amikor a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése a cél
 - rekreációs szerepe, amikor rejtvény jellegű vagy becsapós egy feladat

Ókori Egyiptom, i.e. 2000 körül, Rhind-papirusz

- „Van hét ház; mindegyik házban van hét macska; mindegyik macska megöl hét egeret; mindegyik egér megevett hét kalász gabonát [más forrás szerint: hét szem árpát]; mindegyik kalászból hét *hekatnyi* gabona termett volna. Mennyi az itt felsorolt dolgok összege?”

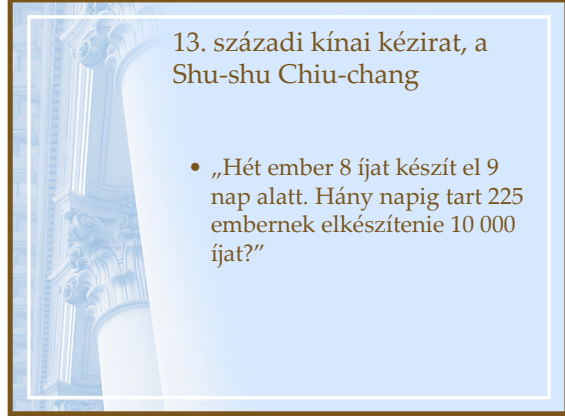
Az ókori Babilónia

- A szöveges feladatok tartalma és az azokban szereplő adatok egy része valóságghű és kézzelfogható volt, azonban például a munkatempóra vonatkozó adatoknál már különvált a matematikai szöveges feladatok világa és a fizikai-társadalmi valóság.



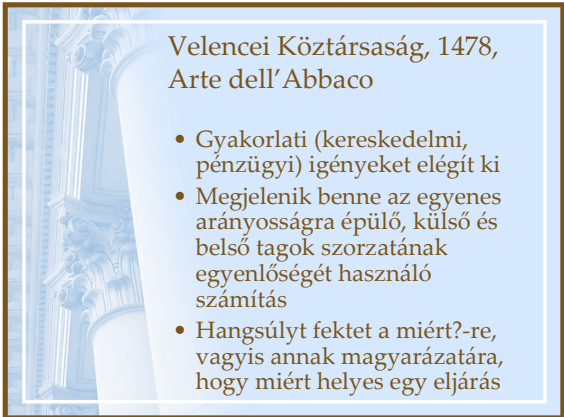
12. századi indiai kézirat, a Lilavati

- „Ha egy 16 éves rabszolganő 32 *niskába* kerül, mennyibe kerül egy 20 éves?”




13. századi kínai kézirat, a Shu-shu Chiu-chang

- „Hét ember 8 íjat készít el 9 nap alatt. Hány napig tart 225 embernek elkészítenie 10 000 íjat?”



Venezi Köztársaság, 1478, Arte dell' Abbaco

- Gyakorlati (kereskedelmi pénzügyi) igényeket elégít ki
- Megjelenik benne az egyenes arányosságra épülő, külső és belső tagok szorzatának egyenlőségét használó számítás
- Hangsúlyt fektet a miért?-re, vagyis annak magyarázatára, hogy miért helyes egy eljárás



Hány éves a kapitány?

- „Mivel geometriát és trigonometriát tanulsz, egy feladatot adok neked. Egy hajó szeli át az óceánt. Bostonból indult, és gyalpút szállít, ami 200 tonna. Le Havre-be megy. A főárboc eltörött, egy hajósinas áll a fedélzeten, összesen 12 utas van a hajón, a szél kelet-északkeleti irányból fúj, az óra pedig délután negyed négyet mutat. Május van. Hány éves a kapitány?” (részlet Flaubert leveléből, amelyet matematikát tanuló testvéréhez intézett)

Hazai szöveges feladatok az 50-es és 70-es évekből

- „Békeívre aláírásokat gyűjt 2 pajtás...”
- Egy Koreába érkezett angol hadosztály létszáma 16 450 katona volt...
- „Gabiék őrsé 1 q papír gyűjtését vállalta. 47 kg-nál tartanak. Mennyit kell még gyűjteniük?”
- *Milyen mértékben függ(het(ne)) a szöveges feladatok tartalma a politikai változásoktól?*

Grenoble-i kutatások, 1980

- „26 birka és 10 kecske utazik egy hajón. Hány éves a kapitány?”
 - Első és második osztályos tanulók „túlnyomó többsége” megoldotta a feladatot
- 125 birkát terel 5 pásztorkutya. Hány éves a juhász?
 - „ $125+5=130$... ez túl nagy, és $125-5=120$ is még mindig túl nagy... azonban ... $125:5=25$... ez már működik. Szerintem a juhász 25 éves.”
 - A 7-9 éves gyerekek 12%-a, a 9-11 éves gyerekek 62%-a nyilatkozott úgy, hogy nem lehetett megfelelő választ adni a feladatra.

Tanári szemszögből

- A szöveges feladatok funkciói egyszerre, egymást segítve lehetnek jelen az osztályteremben
- Lehetőség a saját gondolkodási folyamatok jobb megismerésére (metakognitív tervezés, nyomon követés és értékelés)
- Hogyan különböztessük meg egymástól a különböző funkciójú feladatokat?
- Eredményes hazai fejlesztő kísérletek 3. és 4. osztályos tanulók körében

1. fejlesztő kísérletünk

Kutatótársak: Molnár Éva, Tarkó Klára, Zsigmond István

- Békés megyei iskolákban, 4. osztályban, a matematika és az olvasás 15-15 tanóráján
- Tartalomba ágyazott képességfejlesztés
- Tantermi órákba ágyazott fejlesztés
- Cél: a metakognitív stratégiák fejlesztése, felszabadítása és ehhez
 - Eszköz: metakognitív stratégiák használatát segítő feladatok
 - Stratégia: minimális fejlesztő beavatkozás

A matematikai fejlesztő program 3. órája

A következő feladatokat csoportmunkában oldják meg a tanulók. Emeljük ki, hogy mindenki önállóan számoljon, csak a végeredményt beszéljék meg, de azt alaposan! Nézzék meg, a valóságban elképzelhető-e az az eredmény!

irreális végeredmények

Nagypapa 18 léggömböt talált a fiókban. Szeretné egyenlően elosztani a 4 unokája között. Mít tegyen?

Egy edényben 80 °C-os víz van, a másikban 40 °C-os. Összeöntjük az edények tartalmát egy harmadikba.

Hány fokal lesz a víz az összeöntés után?

Az osztályteremben 20 fok van, kint a szabadban 15. Ha kinyitjuk a szűnetben az ablakot, hány fokal lesz utána a levegő hőmérséklete az osztályteremben?

Laci 4 db 2,5 méter hosszú deszkát vásárolt. Hány darab 1 méteres darabot tud ezekből lefűrészelni?

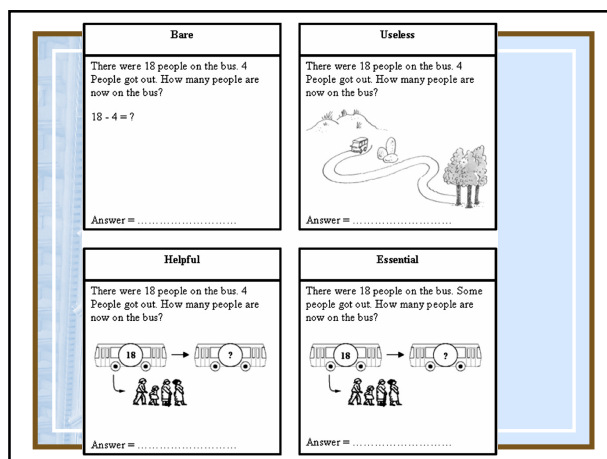
2. fejlesztő kísérletünk

Kutatótársak: Sztányi Judit és Kelemen Rita

- Budapesti, 3. osztályos tanulók körében
- 20 tanítási óra
- Cél: A szöveges feladatok megoldásakor készített rajzok szerepének megtanítása

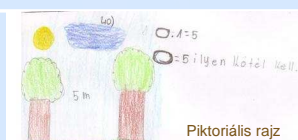
Rajzok használata – tanári szemszögből

- Cai és Lester (2005) kínai és USA-beli tanárokat hasonlítottak össze
 - A kínai tanárok gyakrabban alkalmazták rajzos magyarázatot
- Berends és van Lieshout (2008) négy rajztípust különböztetnek meg a szöveges feladatok megoldása szempontjából:

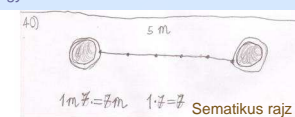


Kísérletünk céljai

- Ökológiai validitás biztosítása
 - 20 tanítási órára kiterjedően, olyan időszakban, amikor a kontroll osztályokban is ezt a témát tanítják
- Realisztikus szöveges feladatok szerepeltetése, amelyek szövegében hétköznapi helyzetekből merítünk, de nem „autentikusak”
- Vizualis reprezentációk fölhasználása
 - Tanulói meggyőződések alakítása a rajzok szerepéről
 - Többféle rajz bemutatása, amelyek a problémahelyzet különféle modelljeit jelentik
 - Megerősítést nyújtani a tanulóknak, hogy olyan rajzokat használjanak, amelyek egyéni jellemzőikhez igazodva elősegítik a problémamegoldást



„Két fa között, amelyek egymástól 5 m távolságra vannak, kötelet szeretnénk kifeszíteni. Sajnos, csak 1 m hosszú kötéldarabok vannak. Hányat kell ezekből egymáshoz kötni?”




Most folyó kutatásaim

1. Tanulásra vonatkozó meggyőződések vizsgálata
Általános meggyőződések
Matematikai meggyőződések
2. Adaptív problémamegoldó stratégiák vizsgálata
Hogyan „kell” kétjegyű számokat fejben összeadni?

Írásaim a témakörben

- Csikos, C., Kelemen, R. & Verschaffel, L. (2011, in press). Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics word problem solving: a large sample Hungarian study. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s11858-011-0308-7
- Csikos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010): Vizualis reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményeit. *Magyar Pedagógia*, 110, 149-166.
- Csikos Csaba és Kelemen Rita (2009): Matematikai szöveges feladatok nehézségének és érdekességének megítélése 5. osztályos tanulók körében. *Iskolakultúra*, 3-4. sz., 14-25.
- Kelemen Rita, Csikos Csaba és Steklács János (2005): A matematikai problémamegoldást kísérő metakognitív stratégiák vizsgálata a hangosan gondolkodtatás és a videomegfolyeés eszközeivel. *Magyar Pedagógia*, 105, 343-358.
- Csikos Csaba (2005): Metakognitívra alapozott fejlesztő kísérlet 4. osztályos tanulók körében a matematika és az olvasás területén. *Magyar Pedagógia*, 105, 127-152.
- Csikos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10-11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, 103, 35-55.
- Csikos Csaba (2002): Hány éves a kapitány? Matematikai szöveges feladatok megértése. *Iskolakultúra*, 12. sz., 10-16.
- Csikos Csaba és Dobi János (2001): Matematikai nevelés. In: Báthory Zoltán és Falus Iván (szerk). *Tanulmányok a neveléstudomány köréből*. Osiris Kiadó, Budapest, 355-372.



Köszönöm a figyelmet!

- www.staff.u.-szeged.hu/~csikoscs
- csikoscs@edpsy.u-szeged.hu